



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE FEIRA DE SANTANA
BACHARELADO EM ENGENHARIA DE COMPUTAÇÃO

KARINE SOUZA DE ALMEIDA

**PROJETO DE UM CONTROLADOR ROBUSTO E ÓTIMO PARA UM SISTEMA DE
SUSPENSÃO ATIVA**

FEIRA DE SANTANA
2012

KARINE SOUZA DE ALMEIDA

**PROJETO DE UM CONTROLADOR ROBUSTO E ÓTIMO PARA UM SISTEMA DE
SUSPENSÃO ATIVA**

Trabalho de Conclusão de Curso
apresentado ao Colegiado de Engenharia
de Computação como requisito parcial
para obtenção do grau de Bacharel
em Engenharia de Computação da
Universidade Estadual de Feira de
Santana.

Orientadora: Profa. Dra. Márcia Lissandra
Machado Prado

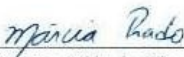
FEIRA DE SANTANA
2012

TERMO DE APROVAÇÃO

JULGAMENTO

Aluno(a): **KARINE SOUZA DE ALMEIDA**

Monografia apresentada e julgada em 09 de Janeiro de 2013 perante a banca examinadora:




Prof. Dra. Márcia Lissandra Machado Prado
(Universidade Estadual de Feira de Santana- DTEC/ UEFS)

APROVADA




Prof. Me. Thiago Cerqueira de Jesus
(Universidade Estadual de Feira de Santana- DTEC/ UEFS)

APROVADA



Prof. Me. Thiago Alberto Barbosa
(Universidade Estadual de Feira de Santana - DTEC/ UEFS)

APROVADA



Coordenador(a) do Colegiado do Curso de Engenharia de Computação

Dedico esse trabalho à minha mãe, Antonia de J., e à minha irmã, Idalba S., por serem meus maiores exemplos de perseverança e por evidenciarem para mim o quanto manter princípios e voltar sempre às origens é importante para sermos bem sucedidos ao longo da vida. Juntas, elas souberam me mostrar o quanto o poder de Deus é infinito. Amo vocês.

AGRADECIMENTOS

Agradeço ao Soberano e Majestoso Deus, pelo Seu sublime cuidado e por todos os benefícios que me tem feito. Agradeço à minha digníssima mãe, Antonia de J., quem me compreendeu nos momentos em que a palavra "compreensão" já não era tão cabível, e ainda, pela sua grandiosa ajuda e paciência durante todo tempo. À minha irmã Idalba S., quem amo incondicionalmente e quem sempre esteve presente nos instantes em que eu mais precisei. Agradeço imensamente ao meu pai, José Francisco B. por todo apoio e motivação. Sou muito grata também ao Aldaberto B., por tudo que me ensinou e por sonhar o meu sonho. À minha orientadora, professora Dra. Márcia L. M. Prado por me auxiliar durante este trabalho. Aos meus amigos, Tassalon, Tiago, Roquelson e Charlene por representarem meu apoio e me incentivarem durante a caminhada. Aos demais irmãos e amigos por torcerem e acreditarem em mim.

RESUMO

A Teoria de Controle Robusto, desde o final da década de 1970, é um ramo da Engenharia que estuda métodos para a construção de controladores com o propósito de melhorar substancialmente o desempenho de sistemas de controle complexos, aplicáveis especialmente à indústria. Sendo assim, este Trabalho de Conclusão de Curso propõe o projeto de um Controlador Robusto e Ótimo para um Sistema de Suspensão Ativa com o objetivo de comparar seu desempenho em malha fechada utilizando diferentes técnicas de Controle. Para realizar a devida comparação, outros controladores também foram desenvolvidos ao longo do projeto e foram aplicados ao sistema de suspensão ativa. As análises foram realizadas levando em consideração as características da resposta do sistema a uma determinada entrada utilizando cada um dos controladores. O sistema de suspensão, o qual teve a sua planta utilizada durante o trabalho, é um sistema mecânico empregado na indústria automobilística. Esse sistema possui sua devida importância para a indústria pelo fato de prover dirigibilidade e conforto aos ocupantes de veículos. Técnicas de Controle Robusto e Ótimo foram aplicadas ao sistema de suspensão, tais como: LQR , que trata-se de um técnica de Controle Ótimo e LQG , que por sua vez, é um método de Controle Robusto e Ótimo. Essas últimas foram consideradas durante o desenvolvimento do trabalho, por serem técnicas apropriadas para melhorar o desempenho de sistemas. Este documento introduz os conceitos necessários para o entendimento e avaliação do comportamento do sistema utilizando os controladores em questão. Os resultados obtidos através das técnicas de controle LQR e LQG foram comparados com os adquiridos por meio da técnica denominada Alocação de Polos por se tratar de um método mais simples e baseado em Realimentação de Estado, a fim de comparar os resultados gerados por um controlador que não é ótimo e nem robusto com controladores LQR e LQG .

Palavras-chave: Teoria de Controle 1. Controle Ótimo 2. Controle Robusto 3. Sistema de Suspensão Ativa 4. Realimentação de Estado Completo 5.

ABSTRACT

Since the end of the 1970s, the Robust Control Theory is an engineering area, which studies methods for the construction of controllers for the purpose of improve substantially the performance of complex control systems, especially applicable in industry. Therefore, this monograph proposes the design of a Robust and Optimal Controller for Active Suspension System in order to compare its performance in closed loop using different techniques about Control. To achieve a proper comparison, others controllers were also developed throughout the project and they were used in the active suspension system. The analyses were done considering the characteristics of the system response from specific input using different controllers. The suspension system is a mechanic system used in automotive industry and it had its plant utilized during this work process. This system is very important to the industry, because it provides drivability and comfort to the vehicles occupants. Techniques about Robust and Optimal Control were applied in the suspension system, such as: LQR, which is a technique of Optimal Control and LQG, which in turn, it is a method of Robust and Optimal Control. These techniques were considered during the development of the work because they are appropriated to improve the performance of the system. This document introduces the necessary concepts for understanding and evaluating of the behavior of the system using the controllers in question. The results obtained by LQR and LQG control techniques were compared with those acquired using the technique called Pole Placement, because it is a simple technique and it is based on Full State Feedback, in order to compare the results generated by a controller that neither is optimal nor is robust with LQR and LQG controllers.

Keywords: Control Theory 1. Optimal Control 2. Robust Control 3. Active Suspension System 4. Full State Feedback 5.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1	Descrição simplificada de um sistema de controle	15
Figura 2	Diagrama de blocos de um sistema em malha aberta	16
Figura 3	Diagrama de blocos de um sistema de malha fechada	17
Figura 4	Resposta a uma entrada em degrau unitário de um sistema de controle	18
Figura 5	Sistema de controle em malha fechada com realimentação unitária	19
Figura 6	Sistema de controle com erro em regime permanente diferente de zero	20
Figura 7	Diagrama de blocos de realimentação de estado completo	24
Figura 8	Observador de estado completo	27
Figura 9	Controlador com variáveis de estado com realimentação de estado completo e observador combinados	29
Figura 10	Polos e zeros no semiplano esquerdo do plano s de um sistema de controle de segunda ordem	30
Figura 11	O Filtro de Kalman	34
Figura 12	Sistema de Suspensão Ativa da Quanser	37
Figura 13	Resposta do sistema de suspensão ativa à função degrau unitário sem um controlador	39
Figura 14	Polos e zeros do sistema de suspensão ativa sem um controlador	40
Figura 15	Aproximação do diagrama de polos e zeros do sistema de suspensão	

ativa sem um controlador	40
Figura 16 Sistema projetado por alocação de polos sem integrador	50
Figura 17 Sistema projetado por alocação de polos com integrador	51
Figura 18 Sistema com controlador LQR sem integrador	52
Figura 19 Respostas do Sistema ao Degrau Unitário com Controlador LQR	53
Figura 20 Respostas ao Degrau Unitário do Sistema de Suspensão Ativa - Alocação de Polos X LQR	54
Figura 21 Resposta do sistema ao degrau unitário utilizando o controlador LQG	55
Figura 22 Gráfico comparativo entre Alocação de Polos, LQG e LQR	56
Figura 23 Respostas do Sistema de Suspensão Ativa ao Degrau Unitário Utilizando as Técnicas de Alocação de Polos, LQR e LQG	57

LISTA DE TABELAS

Tabela 1	Paramêtros dos Sistema de Suspensão Ativa	38
Tabela 2	Resultados das variações das matrizes Q e R	44
Tabela 3	Solução da equação de Riccati para as variações da Tabela 2	45
Tabela 4	Matriz de Realimentação do Sistema	46
Tabela 5	Características do Sistema com o Controlador LQR	53

LISTA DE SÍMBOLOS

$G(s)$	função de transferência da planta
\mathcal{L}	operador de Laplace
s	variável complexa
t_d	tempo de atraso
t_r	tempo de subida
t_p	tempo de pico
M_p	máximo sobressinal
t_s	tempo de acomodação
ξ	coeficiente de amortecimento
ω_n	frequência natural não amortecida
$R(s)$	signal de referência
$E_r(s)$	erro de rastreamento
$G_c(s)$	função de transferência do controlador
$Y(s)$	signal de saída
t	tempo
t_0	tempo inicial
P_c	matriz de controlabilidade
T_f	tempo finito
P_o	matriz de observabilidade
λ_i	i-ésimo autovalor
J	índice de desempenho
∞	infinito
T	transposto
Γ	matriz de ruído
ε	fator ruído
θ	fator ruído
$E\{\}$	esperança matemática
z_r	oscilação da pista
f_c	força
M_s	massa do corpo do carro
M_{us}	massa do pneu
K_s	rigidez da suspensão
K_{us}	rigidez do pneu
B_s	coeficiente do amortecedor do carro
B_{us}	coeficiente do amortecedor do pneu
z_2	posição da massa do carro
z_1	posição da massa do pneu

g
 Ξ
 Θ

aceleração da gravidade
covariância
covariância

LISTA DE SIGLAS

UEFS	Universidade Estadual de Feira de Santana
<i>LQ</i>	<i>Linear Quadratic</i>
<i>LQR</i>	<i>Linear Quadratic Regulator</i>
<i>LQG</i>	<i>Linear Quadratic Gaussian</i>
<i>MATLAB</i>	<i>MATrix LABoratory</i>

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	13
2	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	15
2.1	DEFINIÇÃO DE SISTEMA DE CONTROLE	15
2.2	FUNÇÃO DE TRANSFERÊNCIA	15
2.3	REALIMENTAÇÃO	16
2.4	RESPOSTA TRANSITÓRIA	17
2.5	ERRO EM REGIME PERMANENTE	19
2.6	REPRESENTAÇÃO NO ESPAÇO DE ESTADOS	20
2.6.1	ESTADO	20
2.6.2	VARIÁVEIS DE ESTADO	21
2.6.3	ESPAÇO DE ESTADOS	21
2.6.4	EQUAÇÃO DIFERENCIAL EM ESPAÇO DE ESTADOS	21
2.7	CONTROLABILIDADE E OBSERVABILIDADE	22
2.8	REALIMENTAÇÃO DE ESTADO COMPLETO	24
2.9	OBSERVADORES DE ESTADO	25
2.10	REALIMENTAÇÃO DE ESTADO COMPLETO E OBSERVADOR COMBINADOS	28
2.11	ESTABILIDADE DE SISTEMAS LINEARES COM REALIMENTAÇÃO	29
2.12	SISTEMAS DE CONTROLE ÓTIMO	31
2.13	SISTEMAS DE CONTROLE ROBUSTO	31
2.14	PROBLEMA <i>LINEAR QUADRATIC REGULATOR</i> (LQR)	32
2.15	O FILTRO DE KALMAN	34
2.16	PROBLEMA <i>LINEAR QUADRATIC GAUSSIAN</i> (LQG)	34
3	METODOLOGIA	37
3.1	EQUACIONAMENTO DO SISTEMA DE SUSPENSÃO ATIVA	37
3.2	SISTEMA DE SUSPENSÃO ATIVA SEM O CONTROLADOR	39
3.3	PROJETO DO CONTROLADOR PARA O SISTEMA DE SUSPENSÃO ATIVA UTILIZANDO O MÉTODO POR ALOCAÇÃO DE POLOS	41
3.3.1	MODELAGEM DO SISTEMA UTILIZANDO VARIÁVEIS DE ESTADO	41
3.3.2	CONTROLABILIDADE E OBSERVABILIDADE DO SISTEMA	42
3.3.3	REALIMENTAÇÃO DE ESTADO COMPLETO DO SISTEMA DE SUSPENSÃO ATIVA	42

3.4 PROJETO DO CONTROLADOR LQR PARA O SISTEMA DE SUSPENSÃO ATIVA.....	43
3.5 PROJETO DO CONTROLADOR LQG PARA O SISTEMA DE SUSPENSÃO ATIVA.....	46
4 RESULTADOS.....	50
4.1 CONTROLADOR COM REALIMENTAÇÃO DE ESTADO COMPLETO	50
4.2 RESULTADO DO SISTEMA DE SUSPENSÃO ATIVA COM O CONTROLADOR LQR	51
4.3 RESULTADO DO SISTEMA DE SUSPENSÃO ATIVA COM O CONTROLADOR LQG	54
5 CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	58
REFERÊNCIAS.....	60

1 INTRODUÇÃO

A Engenharia preocupa-se em compreender e controlar materiais e forças da natureza em benefício da sociedade. A área de Sistemas de Controle busca modelar e controlar sistemas modernos, complexos e inter-relacionados, tais como os sistemas que envolvem o controle de variáveis como fluxo, pressão, posição e temperatura. Trata-se de um ramo que contém muitas aplicações úteis e interessantes para indústria, como o projeto de carros para a indústria automotiva e o controle de pilotos automáticos para indústria aeroespacial (DORF; BISHOP, 2009; OGATA, 2003).

A engenharia de controle é bastante abrangente, pois ela não se restringe apenas a um ramo da Engenharia, mas é aplicável às Engenharias Mecânica, Aeronáutica, Química, Civil, Elétrica e de Computação (DORF; BISHOP, 2009).

Com os avanços do controle automático tem sido possível melhorar o desempenho de sistemas dinâmicos que como consequência, gera maior produtividade na indústria e ocorre a diminuição do esforço árduo desempenhado por pessoas para realizar determinadas tarefas (OGATA, 2003). Tudo isso é possível baseando-se em princípios de realimentação e análise de sistemas lineares.

Devido à maior complexidade dos sistemas de controle, processos com modelo matemático variáveis e à fabricação em série de sistemas que requerem controladores para funcionar adequadamente, tornou-se necessário desenvolver controladores robustos que permitissem que as respectivas plantas dos sistemas tivessem desempenho satisfatório em malha fechada (AGUIRRE, 2007).

A robustez se faz necessária devido às incertezas encontradas no modelo e às variações de parâmetros reais que ocorrem quando o sistema está em operação (PRADO, 2001). Um controlador robusto faz com que o sistema mantenha o desempenho desejado, além de contribuir para a atenuação dos efeitos causados por perturbações imprevistas. O projeto de sistemas de controle robusto é baseado em duas tarefas: definir a estrutura do controlador e realizar o ajuste dos parâmetros do mesmo para fornecer um desempenho "ótimo" (DORF; BISHOP, 2009). Sendo assim, no caso deste trabalho, o sistema utilizado para testar os controladores desenvolvidos é um Sistema de Suspensão Ativa.

O Sistema de Suspensão Ativa é um exemplo de um sistema mecânico empregado em automóveis e em aplicações industriais. As suspensões veiculares visam suportar adequadamente o chassi do veículo, isolando-o das vibrações causadas pela irregularidade do terreno, manter o contato dos pneus com o solo de

maneira que o carro fique o mais estável possível e proporcionar melhor dirigibilidade e conforto aos ocupantes do veículo (CÔRTE-REAL, 2002; SILVA; GRANDINETTI, 2005). Além disso, trata-se de um sistema apropriado para fins de projetos de controladores, já que estes últimos são necessários para garantir o funcionamento adequado do sistema. Em vista disso, este Trabalho de Conclusão de Curso possui como propósito a aplicação do controlador robusto e ótimo a uma planta de sistema de suspensão mecânica de automóveis no intuito de melhorar seu desempenho. Os resultados serão comparados com projetos de controladores para o mesmo sistema desenvolvidos com técnicas encontradas na literatura.

Objetiva-se com esse trabalho aplicar os conhecimentos de matemática adquiridos na graduação, compreender a área de Controle Robusto, além de aprender os conceitos relacionados ao Controle Ótimo e Robusto e colaborar com o desenvolvimento da área de Sistemas de Controle na Universidade Estadual de Feira de Santana (UEFS).

Esta monografia está disposta de modo a tratar dos subsídios necessários para compreensão geral do trabalho e implementação relacionada. O capítulo 2 tem como objetivo fundamentar o trabalho, trazendo os principais conceitos utilizados durante o desenvolvimento do mesmo. Define-se Sistema de Controle, Realimentação, tópicos relacionados à Análise de Sistemas de Controle no Espaço de Estados, Sistemas de Controle Ótimo e Controle Robusto com foco nos controles LQR e LQG . Desse modo, é possível criar a ponte necessária para o entendimento geral do trabalho.

O capítulo 3 restringe-se aos procedimentos aplicados para a obtenção dos resultados. Será realizada a modelagem do sistema, posteriormente será encontrada a função de transferência que rege o sistema e sua representação no espaço de estados. No final do capítulo, serão descritos os passos adicionais para que sejam obtidos os resultados.

Os resultados adquiridos com o objetivo de medir o desempenho do sistema em questão são apresentados no capítulo 4. Este capítulo apresenta a avaliação do Sistema de Suspensão Ativa após a elaboração do Controlador Robusto e Ótimo que será aplicado à planta. Essa avaliação será realizada através de comparações com técnicas de controle vistas na literatura.

Por fim, serão realizadas as devidas considerações em torno do trabalho desenvolvido e resultados encontrados, indicando quais diretrizes podem ser tomadas em relação a trabalhos futuros.

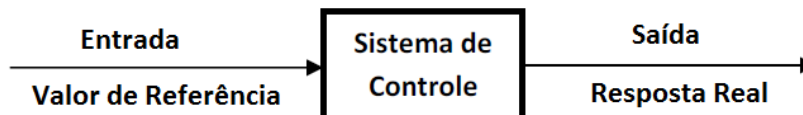
2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Neste capítulo, apresentam-se os conceitos que contemplam o arcabouço teórico para a compreensão do sistema em estudo e da Teoria de Controle fundamentais para chegar ao projeto de um controlador que leve o sistema a tornar-se robusto e ótimo.

2.1 DEFINIÇÃO DE SISTEMA DE CONTROLE

Um **sistema de controle** consiste em subsistemas e processos (ou plantas) interconectados entre si com o objetivo de controlar as saídas dos processos (NISE, 2002). Os sistemas de controle sempre visam controlar variáveis, nos quais geralmente, a variável controlada é a saída do sistema, de forma que seja manipulada para o sistema corrigir ou limitar os desvios do valor medido a partir de um valor de referência (OGATA, 2003). De um modo mais elementar, um sistema de controle gera uma saída ou resposta para um determinado estímulo ou excitação (NISE, 2002). A Figura 1 representa uma versão simplificada de um sistema de controle.

Figura 1: Descrição simplificada de um sistema de controle



Fonte: Adptada de (NISE, 2002)

2.2 FUNÇÃO DE TRANSFERÊNCIA

A **função de transferência** de um sistema representado através de uma equação linear invariante no tempo estabelece uma definição viável que relaciona algebricamente a entrada e a saída do sistema (NISE, 2002; OGATA, 2003). Essa função permite separar a entrada, o sistema e a saída em três partes distintas (NISE, 2002). Admitindo-se todas as condições iniciais nulas, a função de transferência se dar pela relação entre a transformada de Laplace da saída e a transformada de Laplace da entrada. Sendo assim, considere a equação diferencial mostrada na Equação (1), que por sua vez representa um sistema linear e estacionário (OGATA, 2003).

$$a_0 \frac{d^n y}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_{n-1} \frac{dy}{dt} + a_n y = b_0 \frac{d^m x}{dt^m} + b_1 \frac{d^{m-1} x}{dt^{m-1}} + \dots + b_{m-1} \frac{dx}{dt} + b_m x \quad (1)$$

onde x representa a entrada do sistema e y a saída do mesmo. Tem-se que a função de transferência $G(s)$ é dada pela Equação (2), onde $n \geq m$, \mathcal{L} é o operador de Laplace e s é uma variável complexa.

$$G(s) = \frac{\mathcal{L}[\text{saída}]}{\mathcal{L}[\text{entrada}]} = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_{m-1} s + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n} \quad (2)$$

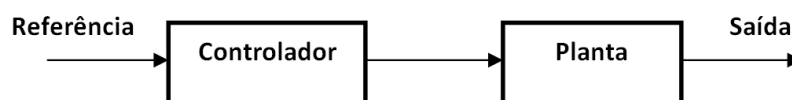
A função de transferência é uma propriedade intrínseca do sistema de controle e através dela é possível conhecer a natureza do sistema e obter uma descrição completa sobre a dinâmica do mesmo (DORF; BISHOP, 2009; OGATA, 2003).

2.3 REALIMENTAÇÃO

Conhecendo a resposta desejada de um sistema de controle, é possível gerar um sinal proporcional ao erro entre a resposta desejada e a resposta real. Então, através da utilização desse sinal pode-se realizar o controle da planta (processo a ser controlado) resultando em uma sequência de operações em malha fechada chamada de **sistema com realimentação** (DORF; BISHOP, 2009).

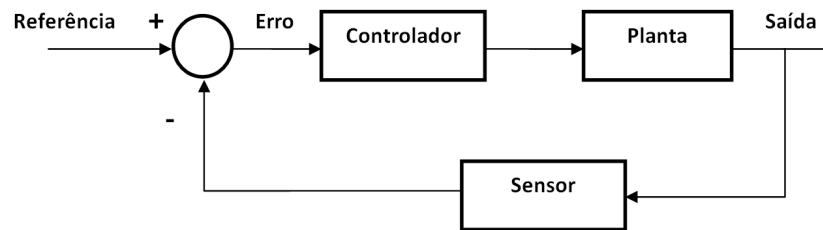
Quando o sistema não possui realimentação é denominado sistema de malha aberta. Nesse caso, um sinal de saída é gerado diretamente em resposta a um estímulo na entrada (DORF; BISHOP, 2009; FRANKLIN; POWELL; EMAMI-NAEINI, 1991). A Figura 2 apresenta um sistema de controle em malha aberta.

Figura 2: Diagrama de blocos de um sistema em malha aberta



Quando trabalha-se com o sistema em malha fechada é possível fazer o ajuste da resposta do sistema em relação a uma entrada de maneira que essa resposta seja mensurada e alterada até atingir a saída desejada para o sistema (FRANKLIN; POWELL; EMAMI-NAEINI, 1991; DORF; BISHOP, 2009). A Figura 3 mostra um sistema com retroação.

Figura 3: Diagrama de blocos de um sistema de malha fechada



Existem diversas vantagens em se utilizar um sistema com realimentação (DORF; BISHOP, 2009), dentre elas estão:

- A redução da sensibilidade do sistema com relação à variação dos parâmetros;
- A minimização dos efeitos causados pelas incertezas do modelo;
- Atenuação do ruído de medida e de perturbações indesejadas;
- Redução do erro em regime permanente do sistema;
- Fácil controle e ajuste da resposta transitória do sistema.

2.4 RESPOSTA TRANSITÓRIA

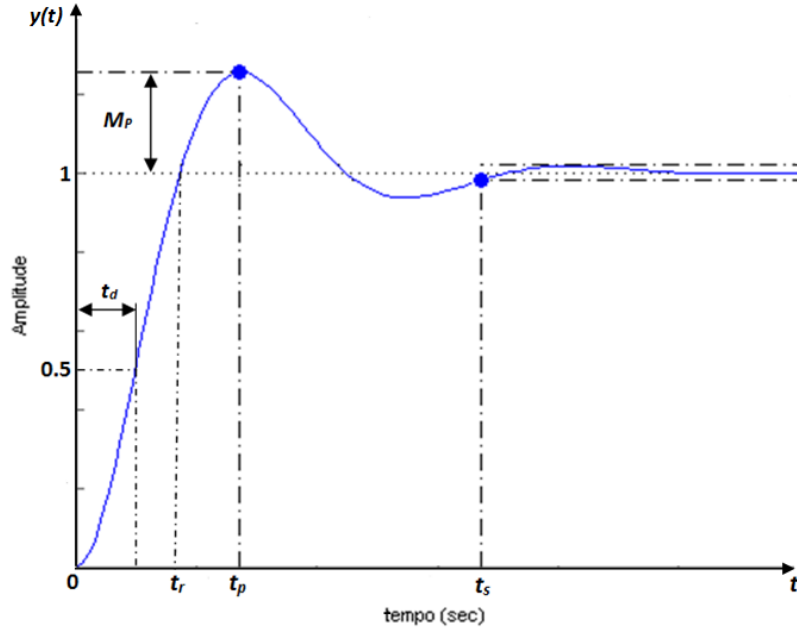
Conhecer a resposta transitória do sistema é muito importante, pois para atingir a saída desejada realizam-se ajustes na resposta transitória até que a mesma alcance uma resposta satisfatória (DORF; BISHOP, 2009). Quando a resposta do sistema em malha aberta é insatisfatória, os ajustes necessários são realizados por meio da inserção de um controlador apropriado no sistema de forma que torne o processo mais adequado. Dessa maneira, é possível encontrar uma função de transferência para o sistema que forneça uma resposta transitória desejada (DORF; BISHOP, 2009).

Uma maneira de avaliar o desempenho dos sistemas é realizando a medição das características do sistema no domínio do tempo. Os sistemas que possuem energia armazenada não podem responder instantaneamente a uma entrada, gerando assim, respostas transitórias (OGATA, 2003).

Antes de chegar ao regime estacionário, a resposta transitória de um sistema pode apresentar oscilações amortecidas. Para uma entrada em degrau unitário, geralmente especifica-se o tempo de atraso t_d , o tempo de subida t_r , o tempo de pico t_p , o máximo sobressinal M_p e o tempo de acomodação t_s como sendo as características da resposta transitória do sistema (OGATA, 2003). A Figura 4 apresenta a curva da resposta a uma entrada em degrau unitário de um sistema de

controle mostrando as características da resposta transitória.

Figura 4: Resposta a uma entrada em degrau unitário de um sistema de controle



O tempo de atraso, t_d , faz alusão ao instante que a resposta chega à metade do valor final pela primeira vez. O tempo de subida, t_r , refere-se ao tempo requerido para que a resposta passe de 10% a 90%, ou de 5% a 95%, ou de 0% a 100% do valor final. O tempo de pico, t_p , é o tempo para a resposta chegar ao primeiro pico de sobressinal. O máximo sobressinal, M_p , é medido a partir da unidade e indica o valor máximo de pico da curva da resposta. O valor de M_p é dado em porcentagem e pode ser calculado através da Equação (3):

$$M_p = e^{-\left(\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\right)\pi} \quad (3)$$

onde ξ é o coeficiente de amortecimento do sistema. A porcentagem máxima do sobressinal é $e^{-\left(\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\right)\pi} \times 100\%$.

O tempo de acomodação, t_s , é o tempo necessário para que a curva da resposta do sistema de controle atinja valores em uma faixa em torno do valor final. Essa faixa geralmente é de 2% ou 5% (OGATA, 2003). O valor de t_s para o qual resposta permanece dentro de 2% do valor final pode ser calculado a partir da Equação (4):

$$t_s = \frac{4}{\xi \omega_n} \quad (4)$$

onde ω_n é a frequência natural não amortecida do sistema.

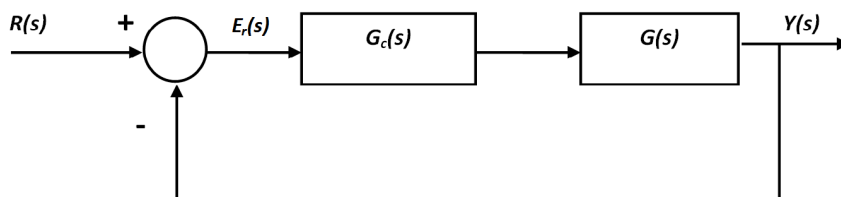
Já o valor de t_s para o qual a resposta se estabelece em uma faixa de 5% do valor final, é dado pela Equação (5):

$$t_s = \frac{3}{\xi \omega_n} \quad (5)$$

2.5 ERRO EM REGIME PERMANENTE

Erro em regime permanente é o erro depois que a resposta transitória tenha desaparecido, deixando apenas a resposta estacionária do sistema, sendo estabelecido pela diferença entre a saída e o valor de referência do sistema (DORF; BISHOP, 2009). Esse erro, também conhecido como erro estacionário, indica a precisão do sistema, informando o quão próximo o sinal de saída do sistema está da saída desejada (OGATA, 2003). Um dos principais motivos de se realizar realimentação é a significativa diminuição do erro do sistema em regime permanente em relação a um sistema direto (DORF; BISHOP, 2009). A Figura 5 mostra um sistema de controle com realimentação unitária como exemplo, onde $R(s)$ representa a entrada de referência, $E_r(s)$ é o erro de rastreamento, a partir do qual calcula-se o erro estacionário do sistema, $G_c(s)$ é o controlador, $G(s)$ é a planta e $Y(s)$ é a saída do sistema.

Figura 5: Sistema de controle em malha fechada com realimentação unitária



Tem-se que o erro de rastreamento E_r é dado pela Equação (6):

$$E_r = \frac{1}{1 + G_c(s)G(s)} R(s) \quad (6)$$

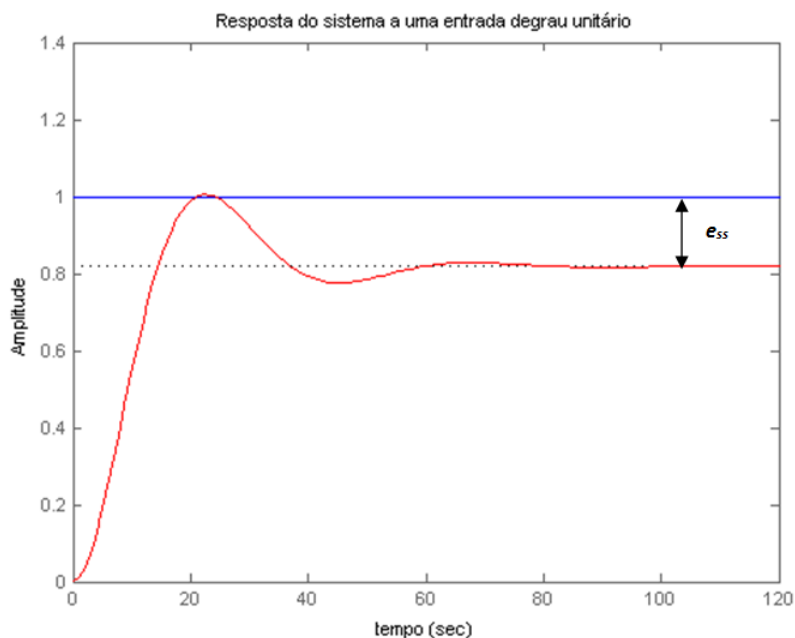
Sendo assim, o erro em regime permanente é obtido através do teorema do valor final, como mostrado na Equação (7):

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} E_r \quad (7)$$

A Figura 6 mostra um sistema de controle que possui erro em regime permanente e_{ss} não nulo, ou seja, existe diferença entre a entrada de referência e

a resposta efetiva do sistema.

Figura 6: Sistema de controle com erro em regime permanente diferente de zero



2.6 REPRESENTAÇÃO NO ESPAÇO DE ESTADOS

Devido à necessidade de realizar tarefas complicadas e de alta precisão, os sistemas têm se tornando cada vez mais complexos para conseguir atender às exigências de desempenho. Em vista disso, a Teoria de Controle baseia-se no conceito de estado de um sistema como uma forma mais conveniente para estudar e compreender os sistemas de controle complexos (OGATA, 2003).

Para um melhor entendimento do trabalho é preciso conhecer o conceito de estado, variáveis de estado, vetor de estado, espaço de estados e equações no espaço de estados.

2.6.1 Estado

O **estado** de um sistema é o conjunto de variáveis conhecidas em $t = t_0$ que juntamente com as entradas do sistema e as equações que o descrevem de forma única, fornece o comportamento do sistema para qualquer instante $t \geq t_0$ (DORF; BISHOP, 2009; OGATA, 2003).

2.6.2 Variáveis de Estado

As variáveis de estado descrevem a configuração do sistema, sendo o menor conjunto de variáveis capaz de indicar o estado do sistema dinâmico. Com elas pode-se determinar a resposta do sistema, dadas as excitações de entrada para $t \geq t_0$, o estado inicial em $t = t_0$ e as equações que descrevem o comportamento do sistema (DORF; BISHOP, 2009; OGATA, 2003).

As variáveis de estado não precisam ser necessariamente mensuráveis e observáveis. Todavia, indica-se que na prática sejam utilizadas variáveis facilmente mensuráveis, pois durante a aplicação das leis de controle ótimo é requerido que todas as variáveis de estado do sistema sejam realimentadas através de uma ponderação adequada (OGATA, 2003).

2.6.3 Espaço de Estados

Espaço de estados é um espaço n-dimensional, onde os eixos coordenados são construídos através dos eixos de x_1, x_2, \dots, x_n , de modo que x_1, x_2, \dots, x_n são as variáveis de estado do sistema dinâmico. Qualquer estado pode ter sua representação nesse espaço (OGATA, 2003).

2.6.4 Equação Diferencial em Espaço de Estados

A equação diferencial que descreve o sistema pode ser reescrita como um sistema de equações diferenciais de 1ª ordem, que por sua vez, está em função do conjunto de variáveis de estado x_1, x_2, \dots, x_n e das entradas do sistema u_1, u_2, \dots, u_m . A partir dessa consideração, as equações diferenciais de primeira ordem podem ser escritas na forma geral de um sistema de equações diferenciais, como mostrado na Equação (8), onde $\dot{x} = dx/dt$.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + b_{11}u_1 + \dots + b_{1m}u_m \\ \dot{x}_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n + b_{21}u_1 + \dots + b_{2m}u_m \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nm}x_n + b_{n1}u_1 + \dots + b_{nm}u_m \end{aligned} \quad (8)$$

Sendo assim, a forma matricial do sistema de equações diferenciais de 1ª ordem será como apresentado na Equação (9):

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix} \quad (9)$$

A matriz-coluna que contém as variáveis de estado é chamada de vetor de estados x e o vetor com os sinais de controle é estabelecido como u . Dessa maneira, a Equação (9) pode ser reescrita na forma da Equação (10), que é denominada **equação de estado**.

$$\dot{x} = \mathbf{A}x + \mathbf{B}u \quad (10)$$

A matriz \mathbf{A} é quadrada de ordem $n \times n$ e é chamada de matriz de estado, \mathbf{B} é denominada a matriz de entrada $n \times m$. O sistema pode ter sua saída representada genericamente como mostrado na Equação (11), chamada de **equação de saída**.

$$y = \mathbf{C}x + \mathbf{D}u \quad (11)$$

Onde y é uma matriz-linha que representa as saídas do sistema, \mathbf{C} é a matriz de saída e \mathbf{D} é denominada matriz de transmissão direta. A representação no espaço de estados (ou representação em variáveis de estado) é composta pela equação de estado e a equação de saída do sistema (DORF; BISHOP, 2009).

2.7 CONTROLABILIDADE E OBSERVABILIDADE

Os conceitos de controlabilidade e observabilidade foram introduzidos por Kalman e têm um papel essencial no projeto de sistemas de controle com realimentação de estados que utilizam a representação no espaço de estados (OGATA, 2003).

O primeiro passo durante o projeto de um controlador de variáveis de estado é verificar se o sistema de controle satisfaz as condições de controlabilidade e observabilidade. Denomina-se que um sistema é completamente controlável se existe um controle $u(t)$ sem restrições que pode transferir qualquer estado inicial $x(t_0)$ para qualquer outra posição desejada $x(t)$ em um tempo finito, $t_0 \leq t \leq T_f$ (DORF; BISHOP, 2009).

Considerando a Equação (10) já apresentada, onde o sinal de controle u é

escalar, pode-se dizer que o sistema é completamente controlável se a condição algébrica da Equação (12) for cumprida:

$$\text{posto} \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{AB} & \mathbf{A}^2\mathbf{B} & \dots & \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B} \end{bmatrix} = n \quad (12)$$

Para um sistema de entrada e saídas únicas, a **matriz de controlabilidade** P_c (de ordem $n \times n$) pode ser definida em função de \mathbf{A} e \mathbf{B} na Equação (13). Pode-se dizer que o sistema é controlável se o determinante de P_c for diferente de zero (DORF; BISHOP, 2009; RUGH, 1996).

$$P_c = \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{AB} & \mathbf{A}^2\mathbf{B} & \dots & \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B} \end{bmatrix} \quad (13)$$

Se e somente se o sistema for controlável a designação de polos pode ser feita de maneira arbitrária (DORF; BISHOP, 2009; OGATA, 2003).

A partir do sistema de tempo contínuo apresentado na Equação (10), porém, agora levando em consideração a sua saída y sem excitação, como mostrado na Equação (14), é possível afirmar que o sistema é completamente observável se e somente se existe um tempo finito T_f de modo que o estado inicial $x(0)$ pode ser determinado a partir do histórico de observações de $y(t)$ dado o sinal de controle $u(t)$, $0 \leq t \leq T_f$ (DORF; BISHOP, 2009).

$$y = \mathbf{C}x \quad (14)$$

Onde:

y = vetor de saída (vetor n)

x = vetor de estado (vetor n)

u = sinal de controle (escalar)

\mathbf{C} = é um vetor linha $1 \times n$

O conceito de observabilidade é muito importante, pois na prática existem dificuldades de se mensurar todas as variáveis de estado por meio do controle por realimentação, tornando-se necessário estimar a variável que não foi possível ser medida, porém isso só pode ser feito se o sistema for completamente observável (OGATA, 2003).

Para um sistema de controle de entrada e saída únicas, como o composto pelas Equações (10) e (14), diz-se a partir da matriz de observabilidade P_o de ordem $n \times n$ apresentada na Equação (15), que o sistema é completamente observável se o determinante de P_o for diferente de zero (DORF; BISHOP, 2009):

$$P_o = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \quad (15)$$

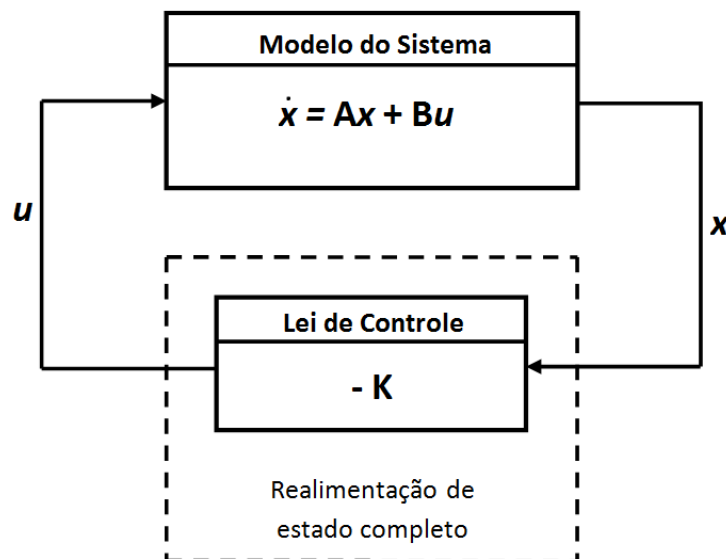
2.8 REALIMENTAÇÃO DE ESTADO COMPLETO

Para um sistema de malha fechada a realimentação de variáveis de estado completo é o meio utilizado para se alcançar a localização desejada dos polos. Durante o projeto de variáveis de estado admite-se que todos os estados estão disponíveis para realimentação (DORF; BISHOP, 2009; FRANKLIN; POWELL; EMAMI-NAEINI, 1991; OGATA, 2003). O modo como a entrada $u(t)$ é adquirida é mostrada na Equação (16), onde \mathbf{K} é a matriz de ganho e $x(t)$ é o estado completo para todo t .

$$u = -Kx \quad (16)$$

A Figura 7 apresenta o diagrama de blocos de realimentação de estado completo (sem entrada de referência).

Figura 7: Diagrama de blocos de realimentação de estado completo



Fonte: Adaptada de (DORF; BISHOP, 2009)

Obter a matriz de ganho \mathbf{K} é a pretensão do método de projeto por realimentação de estado. A estabilidade do sistema em malha fechada é garantida se a lei de controle de realimentação de estado completo estabilizar o sistema e o observador for estável (DORF; BISHOP, 2009). Para um sistema de entrada única e saída única, uma maneira de adquirir a matriz de ganho \mathbf{K} é por meio da fórmula de **Ackermann** como segue na Equação (17):

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} P_c^{-1} q(\mathbf{A}) \quad (17)$$

onde P_c é a matriz de controlabilidade da Equação (13) e $q(A)$ é a equação característica dada pela Equação (18):

$$q(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^n + \alpha_{n-1}\mathbf{A}^{n-1} + \dots + \alpha_1\mathbf{A} + \alpha_0\mathbf{I} \quad (18)$$

Após a realimentação, o sistema em malha fechada é compreendido como exibido na Equação (19). A alocação arbitrária dos polos de um sistema só é permitida se e somente se o sistema for de estado completamente controlável (OGATA, 2003).

$$\dot{x} = \mathbf{A}x + \mathbf{B}u = \mathbf{A}x + \mathbf{B}\mathbf{K}x = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})x \quad (19)$$

2.9 OBSERVADORES DE ESTADO

No projeto de sistemas de controle, nem todas as variáveis de estado estão disponíveis para realimentação, sendo assim, necessário estimá-las (FRANKLIN; POWELL; EMAMI-NAEINI, 1991). O dispositivo ou programa que realiza esse tipo de observação é chamado de **observador de estados** ou apenas **observador**. Quando o observador de estados mensura todas as variáveis de estado do sistema, independente de serem mensuráveis ou não, o mesmo é denominado de **observador de ordem plena**. Quando a observação realizada é somente sobre a quantidade de variáveis de estado não mensurais, e esta quantidade é menor do que a quantidade de variáveis de estado existentes no sistema, então o observador é de ordem reduzida. Se a ordem desse último observador for a menor possível, diz-se que o observador é um **observador de ordem mínima** (OGATA, 2003).

Um observador de estados mensura as variáveis de estado, baseando-se nas variáveis de saída e de controle do sistema. Para que seja possível construir um observador de estados, a condição da observabilidade de um sistema precisa ser satisfeita (OGATA, 2003).

Considere o sistema representado pelas Equações (10) e (14) descritas novamente abaixo, respectivamente:

$$\dot{x} = \mathbf{A}x + \mathbf{B}u$$

$$y = \mathbf{C}x$$

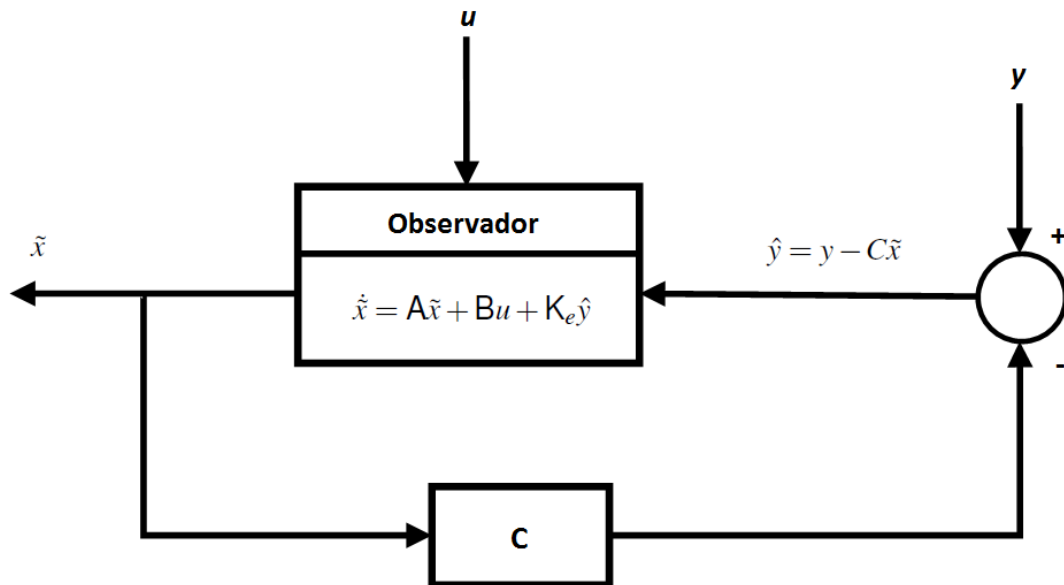
A modelagem matemática do observador pode ser adquirida de forma similar à da planta. A diferença entre a planta e o observador está no fato de que o observador possui mais um termo indicando o erro de estimação usado para compensar possíveis incertezas nas matrizes **A** e **B** e a ausência do erro inicial. O erro de estimação também é conhecido como erro de observação e é calculado através da diferença entre a saída medida e a saída estimada. O erro inicial é obtido por meio da diferença entre o estado inicial e o estado inicial estimado (OGATA, 2003).

A Equação (20) define o modelo matemático de um observador de estados:

$$\dot{\tilde{x}} = \mathbf{A}\tilde{x} + \mathbf{B}u + \mathbf{K}_e(y - \mathbf{C}\tilde{x}) \quad (20)$$

Na Equação (20), \tilde{x} representa a estimativa do estado x e $\mathbf{C}\tilde{x}$ é saída estimada. A matriz \mathbf{K}_e é a matriz de ganho do observador e deve ser determinada como parte do método de projeto do observador. As entradas do observador são a saída y e a entrada de controle u e a saída do observador é \tilde{x} . A Figura 8 apresenta o diagrama de um observador completo.

Figura 8: Observador de estado completo



Fonte: Adaptada de (DORF; BISHOP, 2009)

O vetor de erro é dado pela Equação (21):

$$\tilde{e} = x - \tilde{x} \quad (21)$$

Realizando a derivada do vetor de erro em relação ao tempo, resulta na Equação (22), denominada **erro de estimação**:

$$\dot{\tilde{e}} = \dot{x} - \dot{\tilde{x}} \quad (22)$$

Realizando as devidas substituições na Equação (22), o erro de estimação resulta como mostrado na Equação (23):

$$\dot{\tilde{e}}(t) = (A - K_e C) \tilde{e}(t) \quad (23)$$

Pode-se afirmar que $\tilde{e}(t) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$ para qualquer erro de estimação inicial $\tilde{e}(t_0)$ se a equação característica mostrada na Equação (24) tiver todas as suas raízes no semiplano esquerdo (DORF; BISHOP, 2009).

$$\det(\lambda I - (A - K_e C)) = 0 \quad (24)$$

Em vista disso, durante a construção do observador é suficiente encontrar a matriz K_e de forma que as raízes fiquem no semiplano esquerdo. Esse procedimento

pode ser feito se o sistema for completamente observável, ou seja, a matriz P_o tiver posto completo (DORF; BISHOP, 2009).

2.10 REALIMENTAÇÃO DE ESTADO COMPLETO E OBSERVADOR COMBINADOS

Durante o projeto por alocação de polos, supõe-se que o estado real $x(t)$ está disponível para realimentação. Contudo, na prática pode acontecer do estado real não ser mensurável, então, utiliza-se um observador de estados como um meio de conseguir criar uma estimativa do estado \tilde{x} na realimentação. Então, pode-se considerar a lei de realimentação apresentada na Equação (25) (FRANKLIN; POWELL; EMAMI-NAEINI, 1991; OGATA, 2003):

$$u = -K\tilde{x}(t) \quad (25)$$

Para o sistema controlável e observável composto pelas Equações (10) e (14) já vistas, após substituir a Equação (25) na Equação (10), a equação de estado se tornará como apresentada na Equação (26):

$$\dot{x} = Ax - BK\tilde{x} = (A - BK)x + BK(x - \tilde{x}) \quad (26)$$

Sabendo que o erro é dado por $\tilde{e}(t) = x(t) - \tilde{x}(t)$, tem-se que a Equação (26) torna-se como mostrado na Equação (27):

$$\dot{x} = (A - BK)x + BK\tilde{e} \quad (27)$$

Notando que o erro de estimação do observador foi visto na Equação (23). Então, representando as Equações (23) e (27) na forma matricial, obtém-se a descrição do sistema de controle realimentado como mostrado na Equação (28) (OGATA, 2003; PRADO, 2001):

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\tilde{e}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - BK & BK \\ 0 & A - K_e C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \tilde{e} \end{bmatrix} \quad (28)$$

A equação característica do sistema é dada pela Equação (29) (DORF; BISHOP, 2009; PRADO, 2001):

$$\det(sI - A + BK)\det(sI - A + K_e C) = 0 \quad (29)$$

Os polos do sistema de controle realimentado por estado observado são

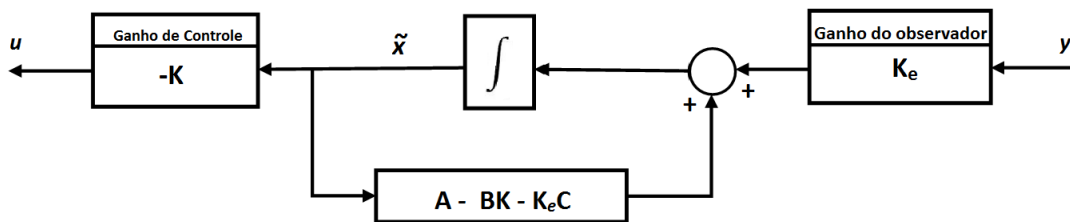
os polos do sistema sem observador com os polos devido ao projeto isolado do observador. Por isso, a realimentação de estado completo e o observador podem ser tratados de forma independente, pois não são influenciados uns pelos outros. Esta propriedade é conhecida como **Propriedade de Separação** (OGATA, 2003; PRADO, 2001).

A função de transferência do controlador-observador é dada pela relação entre a entrada $Y(s)$ e saída $U(s)$ apresentada na Equação (30):

$$\frac{U(s)}{Y(s)} = -K(sI - (A - BK - K_e C)^{-1})K_e \quad (30)$$

A Figura 9 apresenta um compensador com variáveis de estado com realimentação de estado completo e observador integrados, no qual, y é a entrada e u é a saída .

Figura 9: Controlador com variáveis de estado com realimentação de estado completo e observador combinados



Fonte: Adaptada de (DORF; BISHOP, 2009)

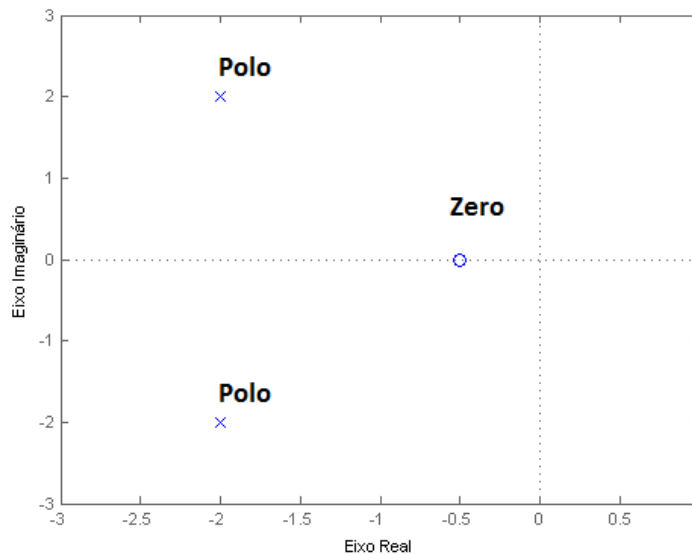
2.11 ESTABILIDADE DE SISTEMAS LINEARES COM REALIMENTAÇÃO

A estabilidade de sistemas com realimentação é uma característica muito importante para o projeto de sistemas de controle, pois caso o sistema não seja estável ele corre o risco de apresentar danos e defeitos. Um sistema estável é um sistema dinâmico que apresenta uma saída limitada para uma entrada também limitada (DORF; BISHOP, 2009; NISE, 2002; OGATA, 2003). A estabilidade de um sistema está diretamente relacionada com a posição das raízes da função de transferência do sistema em malha fechada e com a posição dos autovalores da matriz de entrada para um sistema na representação em variáveis de estado (DORF; BISHOP, 2009; OGATA, 2003).

Uma condição necessária e suficiente para que o sistema com realimentação

seja considerado estável é que todos os polos da função de transferência do sistema tenham parte real negativa, isto é, estejam no semiplano esquerdo do plano s , pois assim, a resposta transitória do sistema alcançará o equilíbrio (DORF; BISHOP, 2009; OGATA, 2003). Caso contrário, o sistema é instável. Se o sistema possuir raízes no eixo imaginário (eixo $j\omega$), mesmo estando no semiplano esquerdo, o sistema será oscilatório (DORF; BISHOP, 2009). Todavia, o fato de todos os polos estarem situados no semiplano esquerdo não assegura que a resposta transitória produzida pelo sistema será satisfatória, porque os polos complexos do sistema podem fazer com que a resposta transitória seja excessivamente oscilatória ou lenta demais. Sendo assim, é preciso encontrar uma localização adequada para os polos de modo que torne a resposta transitória rápida e suficientemente amortecida (OGATA, 2003). A Figura 10 apresenta um mapa de polos e zero de um sistema estável.

Figura 10: Polos e zeros no semiplano esquerdo do plano s de um sistema de controle de segunda ordem



A análise da estabilidade de um sistema com representação no espaço de estados pode ser feita da seguinte forma. Considerando o sistema livre apresentado na Equação (31), onde \mathbf{A} é a matriz de estado e x é o vetor de estados, os autovalores λ_i da matriz de estado podem ser encontrados através da solução da Equação (32), na qual \mathbf{I} representa a matriz identidade (DORF; BISHOP, 2009; NISE, 2002).

$$\dot{x} = \mathbf{A}x \quad (31)$$

$$(\lambda I - A) = 0 \quad (32)$$

2.12 SISTEMAS DE CONTROLE ÓTIMO

Um sistema de controle ótimo difere de um sistema de controle ideal, por conta do primeiro tratar do melhor que se pode conseguir dentro de limites impostos por condições limitantes de ordem física, enquanto o segundo pode ser considerado um objetivo inalcançável (OGATA, 2003).

O desempenho desejado de um sistema de controle pode ser medido em termos de índices de desempenho no domínio do tempo. Os sistemas que são ajustados para fornecer um índice de desempenho mínimo, geralmente são denominados **sistemas de controle ótimo** (DORF; BISHOP, 2009). O desempenho de um sistema de controle escrito em termos das variáveis de estado pode ser expresso como na Equação (33):

$$J = \int_{t=0}^{t_f} g(x, u, t) dt \quad (33)$$

Onde x é o vetor de estado, u é o vetor de controle, t_f é o instante final e J é o valor de índice de desempenho.

2.13 SISTEMAS DE CONTROLE ROBUSTO

A teoria de controle robusto foi desenvolvida por volta de 1980 devido à necessidade de que os controladores garantissem que os sistemas tivessem desempenho em malha fechada satisfatório (AGUIRRE, 2007).

Quando a planta real de um sistema difere do modelo matemático usado no projeto, possivelmente irão existir erros durante o projeto dos controladores, logo, é importante que a robustez esteja presente como uma propriedade do controlador projetado, sendo capaz de funcionar satisfatoriamente na planta real (AGUIRRE, 2007; OGATA, 2010).

Essa teoria parte do pressuposto que o modelo matemático do sistema possui erros ou incertezas, gerando diferenças entre a própria modelagem e a planta real (AGUIRRE, 2007).

Devido à presença de incertezas significantes como uma variação paramétrica, uma perturbação não esperada ou um processo com dinâmica potencialmente não

modelada, é necessário projetar um sistema de controle que seja robusto, pois dessa forma será possível manter o desempenho do sistema apesar das inexatidões e variações encontradas no modelo (DORF; BISHOP, 2009).

Os sistemas que se baseiam na teoria de controle robusto para serem projetados, possuem estabilidade robusta e desempenho robusto. A estabilidade robusta serve para assegurar que o sistema projetado é estável na presença de perturbações e o desempenho robusto garante que o sistema sempre irá atender às especificações mesmo na presença de mudanças de parâmetros (OGATA, 2010).

2.14 PROBLEMA *LINEAR QUADRATIC REGULATOR* (LQR)

O Controle Ótimo possui uma vertente particular denominada **Controle Ótimo Linear**, no qual o processo a ser controlado é linear, assim como a lei de controle a ser utilizada. As técnicas de controle ótimo linear com índice de desempenho quadrático são chamadas *LQ*. Controladores que utilizam os procedimentos *LQ*, além de possuírem índice de desempenho quadrático ótimo, possuem boa tolerância a não-linearidades do modelo (AGUIRRE, 2007).

Ao projetar sistemas de controle ótimo, se está interessado em escolher um vetor de controle $u(t)$ de tal maneira que um dado índice de desempenho seja minimizado. Pode-se provar que os índices de desempenho quadráticos, onde os limites de integração são 0 e ∞ , fornecerão leis de controle lineares, isto é, $u(t) = -Kx$. Sendo assim, sistemas de controle baseados em tais índices de desempenho quadráticos visam determinar os elementos da matriz **K** de forma a encontrar o vetor de controle $u(t)$ (OGATA, 2003).

O aspecto de otimalidade do método *Linear Quadratic Regulator* (*LQR*) é dado pela Equação (34):

$$J = \int_{t=0}^{\infty} (x^T Q x + u^T R u) dt \quad (34)$$

onde **Q** é uma matriz hermitiana definida positiva (ou semidefinida positiva) ou real simétrica e **R** é uma matriz hermitiana definida positiva ou real simétrica (OGATA, 2003).

O problema do *LQR* consiste na minimização da função de custo J apresentada na Equação (34) para que seja adquirido o melhor controlador que poderá proporcionar ao sistema de controle o desempenho desejado (KANIESKI, 2010).

O novo $u(t)$ do sistema será como dado na Equação (35):

$$u(t) = -Kx(t) = -R^{-1}B^T P(t)x(t) \quad (35)$$

onde \mathbf{P} é a solução da equação matricial reduzida de Riccati que é dada pela Equação (36):

$$PA + A^T P - PBR^{-1}B^T P + Q = 0 \quad (36)$$

A atribuição dos valores de \mathbf{Q} e \mathbf{R} pode ser feita de modo empírico, desde que sejam matrizes hermitianas (SELLOW; VEIGA, 2005; XUE; CHEN; ATHERTON, 2007). À medida que os valores de \mathbf{Q} e \mathbf{R} são alterados, as especificações do projeto sofrem alterações (máxima sobre-elevação, tempo de subida). Dessa maneira, os valores de \mathbf{Q} e \mathbf{R} devem ser escolhidos de uma forma que melhor aproxime a resposta do sistema à resposta desejada (SELLOW; VEIGA, 2005; XUE; CHEN; ATHERTON, 2007).

Independente dos valores selecionados para as matrizes \mathbf{Q} e \mathbf{R} , o sistema sempre será estável. Porém, para que o sistema seja estável, é preciso que todos os estados do sistema sejam controláveis (SELLOW; VEIGA, 2005).

O *LQR* é assim conhecido porque ao invés de utilizar o método de designação de polos no projeto, baseia-se na minimização de um índice de desempenho quadrático que está relacionado à energia das variáveis de estado e sinais de controle a serem projetados (KANIESKI, 2010).

Ocorrem basicamente dois estágios durante o projeto de controladores que utilizam os métodos de controle ótimo linear. O primeiro estágio envolve a resolução da equação matricial de Riccati, para a matriz \mathbf{P} . Caso exista uma matriz definida positiva \mathbf{P} para o sistema, esse sistema será estável ou a matriz $\mathbf{A} - \mathbf{BK}$ será estável. A segunda etapa diz respeito à utilizar o valor de \mathbf{P} para encontrar a matriz de ganho de realimentação \mathbf{K} , fazendo como mostrado na Equação (37) (OGATA, 2003).

$$\mathbf{K} = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P} \quad (37)$$

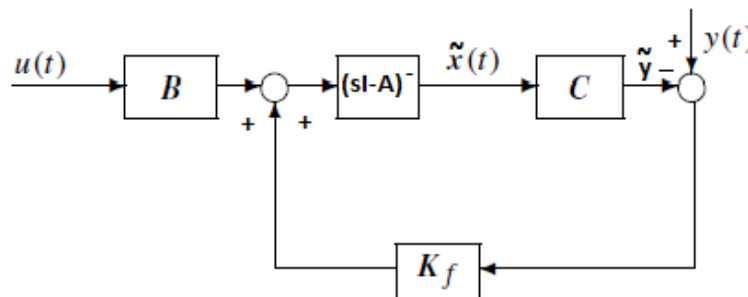
A Figura 7, anteriormente mostrada, representa também o diagrama de um sistema regulador ótimo, considerando que no caso do sistema ótimo a matriz \mathbf{K} é uma matriz ótima (OGATA, 2003).

2.15 O FILTRO DE KALMAN

O filtro de Kalman é um estimador de estado que consegue tratar o problema linear quadrático quando o sistema está perturbado por ruídos brancos, isto é, processos estocásticos Gaussianos de média zero que são não correlacionados entre si (PRADO, 2001).

A Figura 11 apresenta a estrutura do filtro de Kalman (PRADO, 2001).

Figura 11: O Filtro de Kalman



Fonte: Adptada de (PRADO, 2001)

Onde u é o vetor do sinal de controle e y é vetor de saídas medidas.

O filtro de Kalman difere do observador de estado por conta do cálculo da matriz K_f (PRADO, 2001). Na Seção 2.16 é apresentado como a matriz de ganho K_f pode ser obtida.

2.16 PROBLEMA LINEAR QUADRATIC GAUSSIAN (LQG)

Certas variáveis de estado não podem ser medidas ou são muito ruidosas. Assim, um observador é adicionado ao projeto *LQR* para que seja realizada uma estimação do estado através da saída medida. Quando o projeto do observador é feito considerando um ruído gaussiano, então, o controle é chamado de *Linear Quadratic Gaussian* (*LQG*) (PINTO, 2012).

O *LQR* não apresenta características de robustez, já o *LQG*, considera os distúrbios através da introdução dos ruídos na representação do sistema (KWAKERNAAK; SIVAN, 1972). Dessa forma, pode-se dizer que o *LQG* apresenta características robustas.

Considere o sistema na representação em espaço de estados apresentado nas Equações (38) e (39):

$$\dot{x}(t) = \mathbf{A}x(t) + \mathbf{B}u(t) + \Gamma\varepsilon(t) \quad (38)$$

$$y(t) = \mathbf{C}x(t) + \theta(t) \quad (39)$$

onde Γ representa uma matriz ruído e ε e θ são fatores de ruído randômicos da equação de estado e da equação de saída do sistema, respectivamente (XUE; CHEN; ATHERTON, 2007). A partir dos ruídos, têm-se as covariâncias Ξ e Θ mostradas nas Equações (40) e (41), respectivamente:

$$E\{\varepsilon\varepsilon^T\} = \Xi \geq 0 \quad (40)$$

$$E\{\theta\theta^T\} = \Theta > 0 \quad (41)$$

onde $E\{\}$ representa a esperança matemática. Assume-se que Ξ e Θ são mutuamente independentes como mostrado na Equação (42) (MACIEJOWSKI, 1989; XUE; CHEN; ATHERTON, 2007).

$$E\{\varepsilon\theta^T\} = 0 \quad (42)$$

O índice de desempenho para o controle ótimo é definido na Equação (43):

$$J = \lim_{t \rightarrow \infty} E\left\{ \int_{t=0}^{\infty} (z^T \mathbf{Q}z + u^T \mathbf{R}u) dt \right\} \quad (43)$$

onde $z = \mathbf{M}x$ é uma combinação linear dos estados, \mathbf{Q} é uma matriz simétrica semipositiva-definida e \mathbf{R} é uma matriz simétrica positiva-definida. Além disso, $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}^T \geq 0$ e $\mathbf{R} = \mathbf{R}^T > 0$. A matriz \mathbf{R} é escalar quando o sistema é de entrada e saída únicas (MACIEJOWSKI, 1989; XUE; CHEN; ATHERTON, 2007).

O problema do *LQG* pode ser dividido em dois subproblemas como segue. O primeiro envolve a função de custo quadrática, por meio da qual visa-se obter o controle ótimo no sentido de minimizar o valor esperado de um custo quadrático; e o segundo subproblema é que assume-se que o sistema está sujeito a um ruído branco gaussiano (MACIEJOWSKI, 1989; XUE; CHEN; ATHERTON, 2007).

É possível solucionar o problema do *LQG* da seguinte forma. Primeiro, determina-se a matriz \mathbf{K}_c de realimentação de estado ótima que é dada através da Equação (44) (MACIEJOWSKI, 1989; XUE; CHEN; ATHERTON, 2007).

$$\mathbf{K}_c = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P} \quad (44)$$

onde \mathbf{P} , mais uma vez, é uma matriz que satisfaz a equação algébrica de Riccati mostrada na Equação (45):

$$\mathbf{P}\mathbf{A} + \mathbf{A}^T\mathbf{P} - \mathbf{P}\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P} + \mathbf{M}^T\mathbf{Q}\mathbf{M} = 0 \quad (45)$$

e $\mathbf{P} = \mathbf{P}^T \geq 0$. Em geral, existem muitas soluções para a Equação (45), mas somente uma delas é positiva-semidefinida (MACIEJOWSKI, 1989).

Em seguida, é necessário determinar a matriz de ganho \mathbf{K}_f referente ao filtro de Kalman (MACIEJOWSKI, 1989; XUE; CHEN; ATHERTON, 2007). A matriz \mathbf{K}_f é encontrada a partir da Equação (46):

$$\mathbf{K}_f = \mathbf{P}_f\mathbf{C}^T\Theta^{-1} \quad (46)$$

onde \mathbf{P}_f satisfaz outra equação algébrica de Riccati apresentada na Equação (47):

$$\mathbf{P}_f\mathbf{A} + \mathbf{A}^T\mathbf{P}_f - \mathbf{P}_f\mathbf{B}\Theta^{-1}\mathbf{C}^T\mathbf{P}_f + \Gamma\Xi\Gamma^T = 0 \quad (47)$$

onde se tem a matriz ruído, Γ , sendo levada em consideração e $\mathbf{P}_f = \mathbf{P}_f^T \geq 0$.

Considerando que as matrizes \mathbf{P} e \mathbf{P}_f sejam encontradas, as matrizes de ganho \mathbf{K}_c e \mathbf{K}_f existem e o sistema em malha fechada é estável (MACIEJOWSKI, 1989).

Tanto o regulador ótimo, assim como o filtro de Kalman, possuem propriedades de robustez. Porém, projetos utilizando a técnica *LQG* podem apresentar margens de estabilidade arbitrariamente pobres. Essas margens podem acabar sendo perdidas por conta da estimação realizada pelo filtro de Kalman (DOYLE, 1978).

O *LQG* pode apresentar bons resultados se as matrizes de covariância forem utilizadas como parâmetros de sintonização do projeto, e não como representação do sistema real (PRADO, 2001).

3 METODOLOGIA

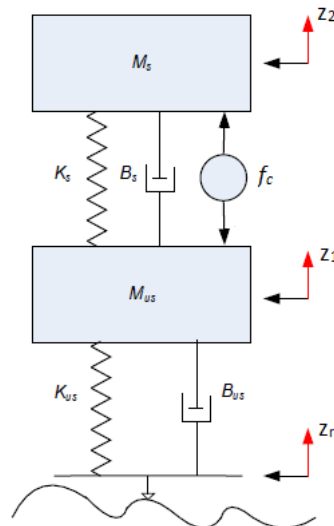
Neste capítulo serão tratados os procedimentos necessários para obter os resultados referentes à elaboração do controlador robusto com desempenho ótimo para um sistema de suspensão ativa.

Como o trabalho propõe avaliar o desempenho do sistema de suspensão em termos de resposta transitória e erro estacionário, dentre a avaliação de outras possíveis características utilizando o método da comparação de controladores ótimos e robustos, foi imprescindível projetar e implementar os mesmos, acompanhados de testes e simulações. Técnicas aplicáveis ao sistema de suspensão ativa, tais como o Projeto por Alocação de Polos, *LQR* e *LQG* são utilizadas, visando assegurar o desempenho do sistema em malha fechada.

3.1 EQUACIONAMENTO DO SISTEMA DE SUSPENSÃO ATIVA

A princípio foi concedido pelo fabricante *Quanser* o modelo físico do sistema de suspensão ativa. Este modelo pode ser visto na Figura 12.

Figura 12: Sistema de Suspensão Ativa da Quanser



Fonte: Adaptada de (QUANSER, 2009)

Desprezando-se as oscilações z_r da estrada, as equações diferenciais que descrevem o sistema na forma simplificada são dadas pelas Equações (48) e (49).

$$M_s \ddot{z}_2 = -M_s g - K_s(z_2 - z_1) - B_s(\dot{z}_2 - \dot{z}_1) + f_c \quad (48)$$

$$M_{us}\ddot{z}_1 = -M_{us}g + K_s(z_2 - z_1) + B_s(\dot{z}_2 - \dot{z}_1) - K_{us}z_1 - B_{us}\dot{z}_1 - f_c \quad (49)$$

Percebe-se que na modelagem matemática a variável z_r não foi levada em consideração, isso se deve ao fato de z_r juntamente com a força f_c representarem entradas para o sistema de suspensão ativa, tornando-o nessa configuração, um sistema extremamente complexo por se tratar de um sistema que possui múltiplas entradas e múltiplas saídas, o que não está no escopo deste Trabalho de Conclusão de Curso. Em vista disso, foram realizadas as modificações necessárias no sistema para torná-lo um sistema de entrada e saída únicas. Em adição a isto, é válido ressaltar que como o objetivo desse trabalho é desenvolver um controlador robusto, certamente as alterações realizadas na planta serão tratadas diretamente durante o projeto de tal controlador, de maneira que promova ao sistema um desempenho satisfatório em malha fechada. Pretende-se usar o parâmetro z_r durante a realização dos testes como uma perturbação na entrada da planta do sistema.

As equações foram modeladas de acordo com as forças atuantes no sistema utilizando a Segunda Lei de Newton. A massa M_s representa a massa do carro e a massa M_{us} realiza o papel do pneu. A variável f_c é a força exercida pelo atuador, sendo considerada a entrada do sistema, já K_s e K_{us} são as constantes da mola referentes à rigidez da suspensão e do pneu, respectivamente. As constantes B_s e B_{us} são os coeficientes dos amortecedores da suspensão e do pneu, respectivamente. A variável z_2 diz respeito à posição da massa do carro M_s e z_1 refere-se à posição da massa do pneu M_{us} . A constante g é a aceleração da gravidade (QUANSER, 2009). Tanto z_1 quanto z_2 são saídas do sistema, contudo, o controlador que será construído irá controlar apenas a saída z_2 . A Tabela 1, apresenta os valores numéricos da planta do sistema.

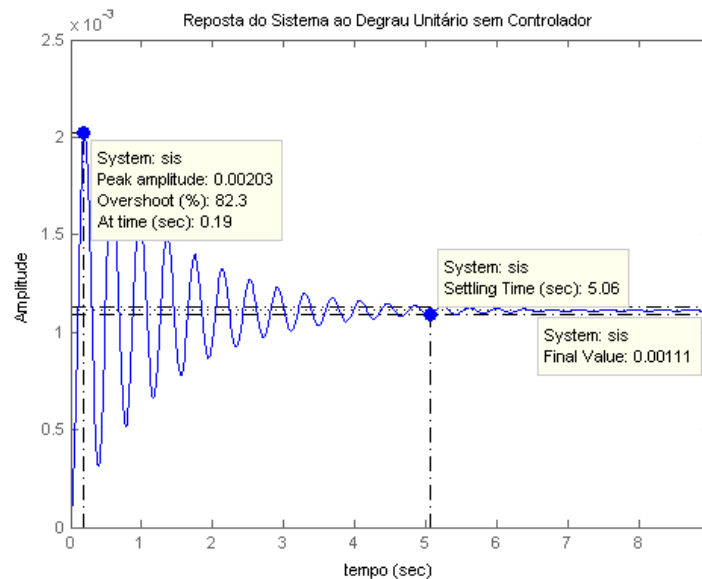
Tabela 1: Paramêtros dos Sistema de Suspensão Ativa

Parâmetro	Valor
M_s	2,45 kg
M_{us}	1 kg
K_s	900 N/m
B_s	7,5 N.s/m
K_{us}	2500 N/m
B_{us}	5 N.s/m
$f_c(\text{máx})$	39 N

3.2 SISTEMA DE SUSPENSÃO ATIVA SEM O CONTROLADOR

O comportamento da resposta do sistema em malha fechada pode ser visto na Figura 13, considerando como entrada de referência o degrau unitário.

Figura 13: Resposta do sistema de suspensão ativa à função degrau unitário sem um controlador



Através da Figura 13 apresentada, é possível perceber que sistema de suspensão ativa possui uma máxima sobre-elevação muito alta de $M_p = 82,3\%$ e um tempo de acomodação $t_s = 5,06s$, o que é considerado um tempo de acomodação alto para as ações imediatas que o sistema de suspensão ativa deve desempenhar.

A Figura 14 mostra o diagrama de polos e zeros do sistema. Os polos são: $p_1 = -4.5245 + 58.9485i$; $p_2 = -4.5245 - 58.9485i$; $p_3 = -0.7562 + 16.2077i$; e $p_4 = -0.7562 - 16.2077i$.

Realizando uma aproximação na Figura 14 (que por sua vez apresenta um zero muito distante dos outros zeros e polos do sistema), é possível visualizar melhor a localização dos polos do sistema, como é exibido na Figura 15. Analisando tais polos, tem-se que o sistema consegue alcançar o equilíbrio tornando-se assim, estável. Isso ocorre por apresentar todos os polos no semiplano esquerdo. Além disso, o sistema apresenta oscilações, cuja amplitude não decresce e nem aumenta após um determinado tempo, como constatado na Figura 13. Essas oscilações são em decorrência dos polos de malha fechada terem parte no eixo $j\omega$, ou seja, os polos não são puramente reais, o que matematicamente justifica a causa das oscilações do sistema.

Figura 14: Polos e zeros do sistema de suspensão ativa sem um controlador

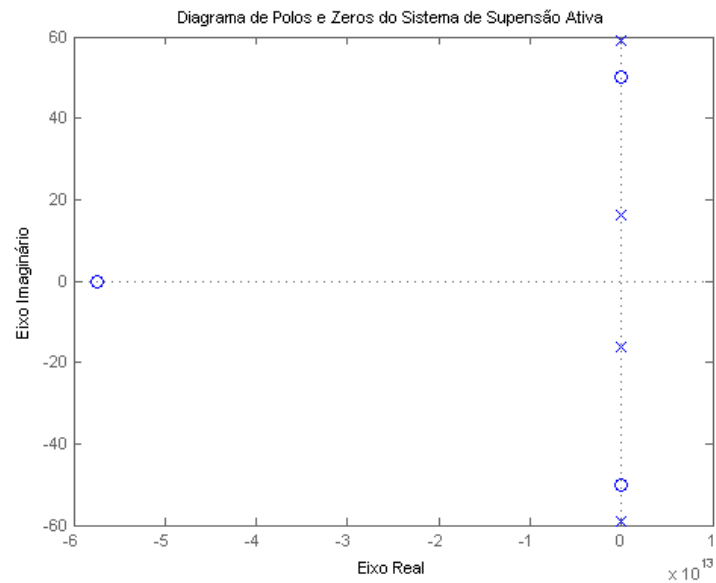
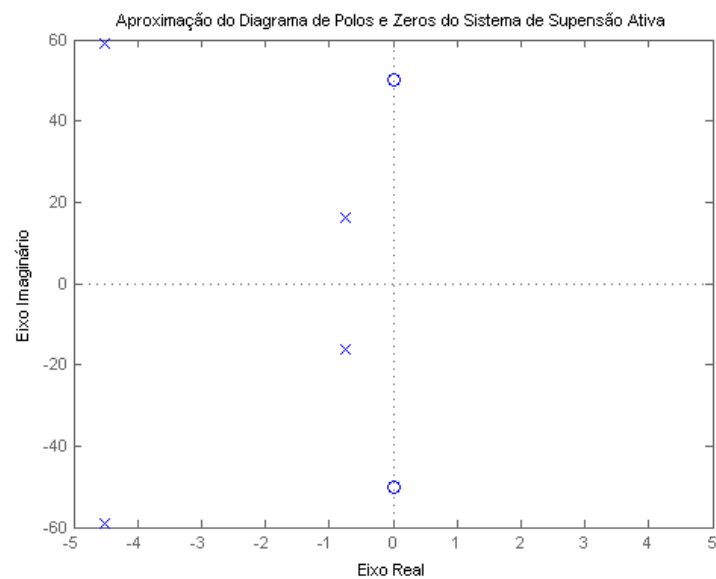


Figura 15: Aproximação do diagrama de polos e zeros do sistema de suspensão ativa sem um controlador



Sendo assim, foram projetados controladores que visam melhorar as características do sistema. O projeto desses controladores se dá conforme mostrado a seguir.

3.3 PROJETO DO CONTROLADOR PARA O SISTEMA DE SUSPENSÃO ATIVA UTILIZANDO O MÉTODO POR ALOCAÇÃO DE POLOS

O projeto por alocação de polos é um método que possui uma abordagem com variáveis de estado e permite especificar não apenas os polos dominantes do sistema, mas todos os polos de malha fechada do mesmo. É um método que permite que os polos sejam selecionados de modo arbitrário por meio da realimentação de estado, podendo melhorar significativamente a resposta transitória do sistema, caso a influência dos polos dominantes de malha fechada seja desprezível (OGATA, 2003). Todavia, para que esse método de controle seja aplicado, o sistema deve ser de estado completamente controlável. Sendo assim, os próximos subtópicos tratam efetivamente da modelagem do sistema em variáveis de estados e da controlabilidade do mesmo.

3.3.1 Modelagem do Sistema Utilizando Variáveis de Estado

O modelo matemático do sistema foi reescrito como um conjunto de equações diferenciais de primeira ordem, sendo posteriormente colocadas na forma matricial a fim de representar o sistema de suspensão ativa através de variáveis de estado como mostrado na Equação (50):

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{-K_s - K_u - B_{us}}{M_{us}} & \frac{-B_s}{M_{us}} & \frac{K_s}{M_{us}} & \frac{B_s}{M_{us}} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{K_s}{M_s} & \frac{B_s}{M_s} & \frac{-K_u}{M_s} & \frac{-B_s}{M_s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{-1}{M_s} \\ 0 \\ \frac{1}{M_s} \end{bmatrix} f_c \quad (50)$$

A variável do sistema de interesse é x_3 (que corresponde à z_2 nas equações diferenciais do sistema), sendo assim, a representação da saída do sistema é dada pela Equação (51):

$$y = \mathbf{C}x = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \quad (51)$$

A matriz de transmissão direta é $\mathbf{D} = [0]$.

Substituindo as variáveis pelos seus valores numéricos mostrados na Tabela 1, o sistema será como apresentado nas Equações (52) e (53) :

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3405 & -7.5 & 900 & 7.5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 367.3469 & 3.06122 & -367.3469 & -3.06122 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ -1.0000 \\ 0 \\ 0.4082 \end{bmatrix} u \quad (52)$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x \quad (53)$$

onde $u = f_c$, que por sua vez, é a entrada da planta.

3.3.2 Controlabilidade e Observabilidade do Sistema

Após obter a representação, foi verificado que o sistema dinâmico em questão é controlável e observável. O valor do posto da matriz de controlabilidade P_c , já apresentada na Equação (13), que envolve as matrizes de estado e de entrada direta foi $n = 4$. Outra maneira de se certificar com relação à controlabilidade do sistema foi calculando o determinante da matriz. O determinante calculado é diferente de zero, o que é condição suficiente para que um sistema de saída e entrada únicas seja controlável. Além disso, foi verificado também que o sistema de suspensão ativa é completamente observável já que o valor do determinante de P_o , calculado a partir da Equação (15), é diferente de zero.

3.3.3 Realimentação de Estado Completo do Sistema de Suspensão Ativa

Tendo em vista que o sistema é completamente controlável e observável e que a variável de estado a ser controlada é x_3 , foram aplicados os conceitos de realimentação de estado completo para alcançar a localização desejada dos polos do sistema. Os novos polos para o sistema foram selecionados de forma que fosse admitido para o sistema um tempo de acomodação máximo de $t_s = 1$ s (com tolerância de 2%) e uma sobre-elevação máxima $M_p = 10\%$. Baseado nisso, o valor de ξ encontrado utilizando a Equação (3) para que se tenha uma máxima sobre-elevação de 10% foi igual a 0,59. Com os valores de t_s e ξ definidos, foi encontrado o valor de $\omega_n = 6,779661$, que foi encontrado aplicando-se a Equação (4) já apresentada. Então, utilizando a equação característica para um sistema de 4ª ordem foi possível estabelecer os seguintes polos desejados para o sistema:

$$(s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2)(s + p_1)(s + p_2)$$

$$(s^2 + 2 \times 0,59 \times 6,779661s + 6,779661^2)(s + p_1)(s + p_2)$$

$$(s^2 + 7,9999s + 45,9638)(s + p_1)(s + p_2)$$

$$p_1 = -25; p_2 = -25; p_3 = -4 + 5,4739i; e p_4 = -4 - 5,4739i$$

Os polos p_1 e p_2 foram escolhidos de forma que ficassem distante, à esquerda dos polos dominantes de malha fechada (que em geral são os polos complexos do sistema), isso foi feito para tornar a resposta do sistema mais rápida.

Encontrados os polos desejados para o sistema e montando a matriz de estado e a matriz de entrada, foi possível realizar o cálculo da matriz de ganho de realimentação de estado \mathbf{K} a partir da fórmula de Ackermann já apresentada na Equação (17). O cálculo da matriz de ganho \mathbf{K} foi obtido com o auxílio do *MATLAB*. A matriz \mathbf{K} de realimentação de ganho do sistema é apresentada na Equação (54):

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 968.3415 & -62.0128 & -693.4597 & 25.5439 \end{bmatrix} \quad (54)$$

A partir da matriz de ganho foi adquirida a resposta do sistema realimentado para a função degrau unitário para avaliar o comportamento do sistema que será apresentado posteriormente.

3.4 PROJETO DO CONTROLADOR *LQR* PARA O SISTEMA DE SUSPENSÃO ATIVA

Considerando novamente o sistema de suspensão ativa nas Equações (55) e (56):

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3405 & -7.5 & 900 & 7.5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 367.3469 & 3.06122 & -367.3469 & -3.06122 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -1.0000 \\ 0 \\ 0.4082 \end{bmatrix} u \quad (55)$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x \quad (56)$$

Durante o desenvolvimento do controlador *LQR*, primeiramente foi necessário solucionar o problema do regulador quadrático linear e a equação de Riccati associada já apresentada na Equação (36).

Para encontrar a solução \mathbf{P} da equação matricial de Riccati e consequentemente a matriz de ganho \mathbf{K} , foi indispensável encontrar as matrizes

hermitianas **Q** e **R** adequadas para o sistema. Para selecionar as matrizes **Q** e **R**, foi necessário realizar testes verificando quais os valores dessas matrizes contribuem para a melhora do desempenho do sistema em termos de máxima sobre-elevação e tempo de acomodação. Os testes foram realizados utilizando uma abordagem computacional descrita em (OGATA, 2003), visando encontrar os valores mais convenientes para **Q** e **R**. Foram realizados 4096 testes variando os valores das matrizes hermitianas. Os testes foram feitos na tentativa de encontrar matrizes que levassem o sistema a gerar respostas com máxima sobre-elevação de até 10% e com tempo de acomodação no máximo 1s. Dentre os 4096 valores testados, encontrou-se 210 valores que ficaram na faixa dos requisitos propostos. A Tabela 2 apresenta alguns desses valores.

Tabela 2: Resultados das variações das matrizes Q e R

Identificação	Matriz Q	Matriz R
LQR 1	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 100 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1000000 \end{bmatrix}$	$[1 \times 10^{-4}]$
LQR 2	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 100 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 100 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 100 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1000000 \end{bmatrix}$	$[1 \times 10^{-4}]$
LQR 3	$\begin{bmatrix} 100 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 100 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1000000 \end{bmatrix}$	$[1 \times 10^{-6}]$
LQR 4	$\begin{bmatrix} 10000 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1000000 \end{bmatrix}$	$[1 \times 10^{-4}]$
LQR 5	$\begin{bmatrix} 1000000 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 100 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1000000 \end{bmatrix}$	$[0.01]$

Percebe-se que a matriz hermitiana **Q** é de 5ª ordem. Isso se fez necessário por conta da adição de um integrador ao sistema para solucionar um erro em regime permanente.

Após encontrar matrizes **Q** e **R** convenientes para o sistema, o passo seguinte foi determinar a matriz de ganho **K** ótima de realimentação. Como visto durante a revisão de literatura, pode-se obter a matriz de ganho **K** resolvendo-se a equação algébrica de Riccati já dada na Equação (36) e reescrita abaixo para uma matriz definida positiva **P**:

$$PA + A^T A - PBR^{-1}B^T P + Q = 0$$

Com o auxílio do *MATLAB*, a solução **P** da equação de Riccati para cada um dos pares de **Q** e **R** apresentados na Tabela 2 são mostrados na Tabela 3.

Tabela 3: Solução da equação de Riccati para as variações da Tabela 2

Identificação	Matriz P					
LQR 1	1×10^5	0.0022	-0.0000	-0.0001	-0.0000	-0.0007
		-0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	-0.0002
		-0.0001	0.0000	0.0157	0.0001	-0.1103
		-0.0000	0.0000	0.0001	0.0000	-0.0007
		-0.0007	-0.0002	-0.1103	-0.0007	1.4880
LQR 2	1×10^5	0.0465	-0.0004	-0.0103	-0.0011	0.0477
		-0.0004	0.0000	0.0003	0.0000	-0.0018
		-0.0103	0.0003	0.0239	0.0008	-0.1590
		-0.0011	0.0000	0.0008	0.0001	-0.0045
		0.0477	-0.0018	-0.1590	-0.0045	1.7883
LQR 3	1×10^5	2.5139	-0.0136	-0.2399	-0.0333	0.8537
		-0.0136	0.0001	0.0025	0.0003	-0.0104
		-0.2399	0.0025	0.0716	0.0060	-0.3612
		-0.0333	0.0003	0.0060	0.0007	-0.0255
		0.8537	-0.0104	-0.3612	-0.0255	2.6879
LQR 4	1×10^5	0.0023	-0.0000	0.0004	-0.0000	-0.0053
		-0.0000	0.0000	0.0001	0.0000	-0.0004
		0.0004	0.0001	0.0084	0.0002	-0.0641
		-0.0000	0.0000	0.0002	0.0000	-0.0013
		-0.0053	-0.0004	-0.0641	-0.0013	1.5136
LQR 5	1×10^5	2.9414	-0.0133	-0.2840	-0.0391	0.8571
		-0.0133	0.0002	0.0032	0.0003	-0.0110
		-0.2840	0.0032	0.1037	0.0083	-0.4193
		-0.0391	0.0003	0.0083	0.0010	-0.0295
		0.8571	-0.0110	-0.4193	-0.0295	3.1930

Substituindo cada matriz **P**, respectivamente, na Equação (37), encontrou-se a matriz de ganho **K** de realimentação ótima para o sistema em cada um dos casos de **Q** e **R**. A Tabela 4 mostra a matriz de realimentação para cada um dos casos mostrados na Tabela 2.

Tabela 4: Matriz de Realimentação do Sistema

Identificação	Matriz de Realimentação K
LQR 1	$1 \times 10^4 [-0.4188 \quad 0.0014 \quad 1.3980 \quad 0.1095]$
LQR 2	$1 \times 10^4 [-4.3112 \quad -0.0469 \quad 1.6983 \quad 0.1582]$
LQR 3	$1 \times 10^6 [-2.6058 \quad -0.0854 \quad 0.2679 \quad 0.0361]$
LQR 4	$1 \times 10^4 [-1.0001 \quad 0.0061 \quad 1.4236 \quad 0.0634]$
LQR 5	$1 \times 10^4 [-2.6774 \quad -0.0850 \quad 0.2293 \quad 0.0412]$

Com os valores de **K** definidos, tornou-se possível encontrar o sinal de controle $u = Kx$, além de encontrar a nova matriz de estado dada por **A – BK**, a nova matriz de controle **B**, a matriz de saída e de transmissão direta que permaneceram as mesmas, **C** e **D**, respectivamente. Com esses dados, a resposta ao degrau unitário foi gerada para analisar a saída do sistema com o controlador *LQR*.

É válido ressaltar que como existe apenas uma solução **P** definida-positiva para cada um dos casos apresentados, então a matriz de estado **A – BK** realmente é estável, podendo-se concluir que o método utilizado fornece um resultado correto.

Na prática, o projeto foi realizado com o auxílio do *MATLAB*, no qual através do comando $lqr(A, B, Q, R)$, foi possível calcular a matriz de ganho **K** ótima de realimentação, de forma que a lei de controle $u = -Kx$ minimiza a função de custo *J* já apresentada na Equação (43).

O sistema projetado minimiza o índice de desempenho quadrático e é por definição considerado ótimo (OGATA, 2003). Essa otimização diz respeito à garantia de que o sistema sempre será estável e não que o mesmo tenha literalmente a "característica ótima" (OGATA, 2003). Posteriormente será realizada a análise dos resultados adquiridos utilizando o método abordado nesta Seção.

3.5 PROJETO DO CONTROLADOR *LQG* PARA O SISTEMA DE SUSPENSÃO ATIVA

Na sequência, foi desenvolvido o controlador *LQG*. Como já tratado, o *LQG* é um método de controle ótimo e robusto, no qual um ruído randômico é considerado nas equações de estado e saída do sistema, de forma que a informação quantitativa referente ao ruído é usada para projetar o controlador. Sendo assim, considerando que o sistema de suspensão ativa está sujeito a ruído, o sistema será representado como mostrado nas Equações (57) e (58):

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3405 & -7.5 & 900 & 7.5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 367.3469 & 3.06122 & -367.3469 & -3.06122 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -1.0000 \\ 0 \\ 0.4082 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \varepsilon(t) \quad (57)$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x + \theta(t) \quad (58)$$

cuja matriz que está multiplicando o fator $\varepsilon(t)$ representa o ruído Γ .

Para o controlador *LQG* ser implementado de fato, foram definidas as covariâncias Ξ e Θ em relação ao ruído da planta $\varepsilon(t)$ e mensuração do ruído $\theta(t)$, respectivamente como (XUE; CHEN; ATHERTON, 2007): $\Xi = 7 \times 10^{-4}$ e $\Theta = 10^{-8}$.

Considerando a planta do sistema de suspensão ativa e o critério de otimização J , o controlador *LQG* foi construído baseado em um observador de estados como segue.

Supondo-se que a matriz de realimentação de estado K_c e a matriz de ganho de Kalman K_f tenham sido adquiridas via o princípio de separação, segundo (XUE; CHEN; ATHERTON, 2007), o controlador *LQG* baseado em observador pode ser descrito como na Equação (59):

$$G_c = \begin{bmatrix} A - K_f C - B K_c + K_f D K_c & K_f \\ K_c & 0 \end{bmatrix} \quad (59)$$

Através do comando $-lqg(Planta, W, V)$ disponível no *software MATLAB* foi possível encontrar o controlador observador G_c . Segundo (XUE; CHEN; ATHERTON, 2007) as matrizes auxiliares W e V podem ser construídas seguindo as Equações (60) e (61):

$$W = \begin{bmatrix} Q & N_c \\ N_c^T & R \end{bmatrix} \quad (60)$$

$$V = \begin{bmatrix} \Xi & N_f \\ N_f^T & \Theta \end{bmatrix} \quad (61)$$

onde N_c e N_f foram assumidas como zero.

Todavia, percebe-se que para a realização do cálculo da matriz **W** é necessário estabelecer as matrizes de ponderação **Q** e **R** que melhor contribuam para o desempenho do sistema, melhorando a resposta transitória e em regime permanente.

Para realizar a escolha das matrizes **Q** e **R** foi utilizada, assim como no *LQR*, a abordagem computacional vista em (OGATA, 2003). Foram testadas 7776 variações para as matrizes hermitianas **Q** e **R** e verificados os resultados gerados pelo sistema utilizando tais matrizes. Sendo assim, as matrizes **Q** e **R** selecionadas são mostradas nas Equações (62) e (63), respectivamente.

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 40000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 11500 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix} \quad (62)$$

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0.001 \end{bmatrix} \quad (63)$$

Contudo, os resultados adquiridos com o *LQG* não variaram tanto como os adquiridos com o método *LQR*. Foram encontrados apenas 3 variações de matrizes **Q** e **R** que geraram resultados dentro dos requisitos estabelecidos (tempo de acomodação de no máximo 1s e máxima sobre-elevação de 10%). Entretanto, esses resultados apresentaram a mesma máxima sobre-elevação e valores muito próximos de tempo de acomodação. Então, em vista disso, apenas o resultado com o menor tempo de acomodação foi utilizado para a análise do sistema usando a técnica *LQG*.

Definindo-se **Q** e **R**, Ξ e Θ , estabeleceu-se os resultados das matrizes **W** e **V** como descrito nas Equações (64) e (65), respectivamente:

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 40000 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 11500 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix} \quad (64)$$

$$\mathbf{V} = 10^{-3} \times \begin{bmatrix} 0.7 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (65)$$

Após adquirir as matrizes **W** e **V**, tornou-se possível encontrar o controlador *LQG*, G_c , efetivamente. O controlador utilizando a técnica *LQG* é apresentado na Equação (66):

$$G_c = \frac{951399.5105(s + 58.08)(s^2 + 8.174s + 141.4)}{(s + 51.41)(s + 0.001093)(s^2 + 166.7s + 1.309 \times 10^4)} \quad (66)$$

Tanto o *LQR*, como o *LQG* são reguladores relativamente complexos em suas respectivas teorias. Sendo assim, foi necessário utilizar o auxílio do *MATLAB* para realizar grande parte desse projeto. O resultado adquirido após aplicar o controlador *LQG* à planta será mostrado e analisado posteriormente.

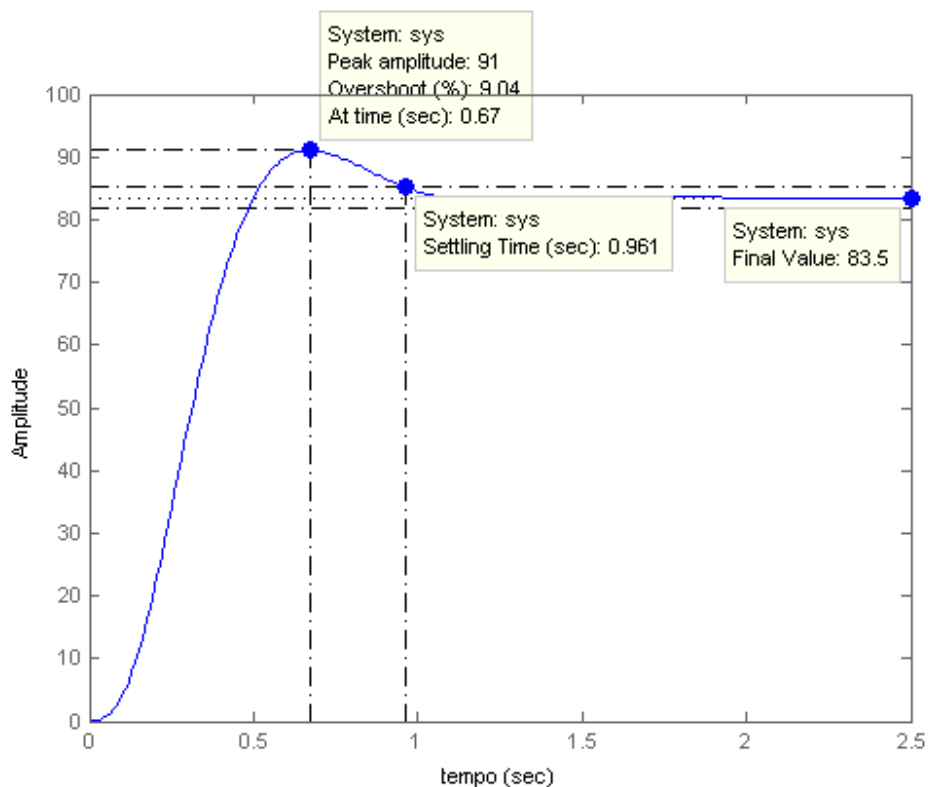
4 RESULTADOS

Neste capítulo serão apresentados os resultados obtidos nesse trabalho e as comparações dos mesmos de forma a verificar qual dos controladores projetados potencializa melhor as características do sistema de suspensão ativa utilizando as técnicas de controle, *LQR*, *LQG* e Alocação de Polos.

4.1 CONTROLADOR COM REALIMENTAÇÃO DE ESTADO COMPLETO

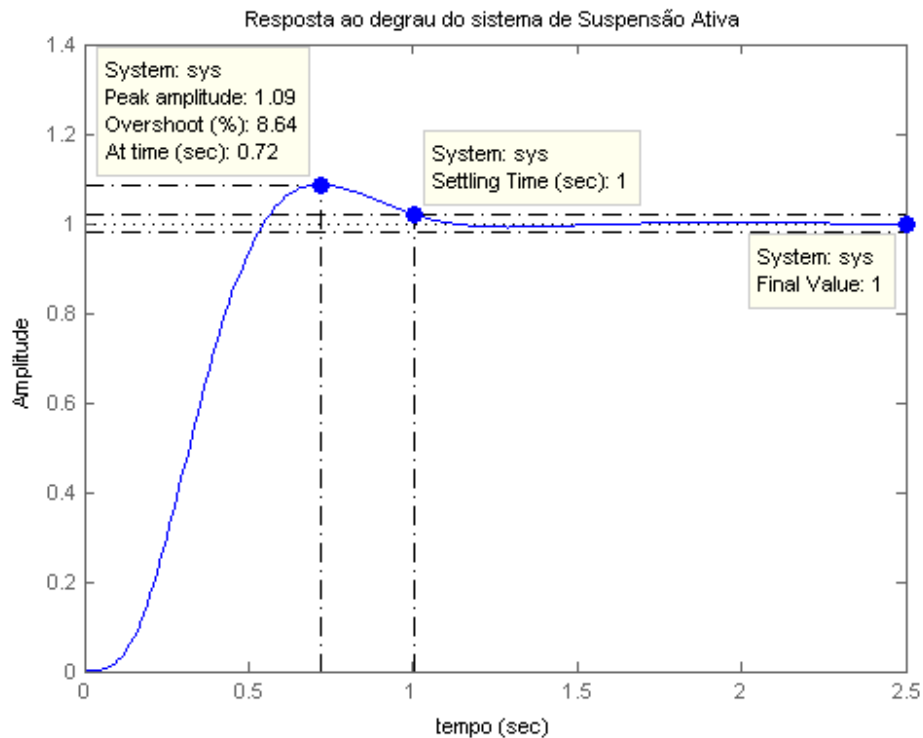
A Figura 16 mostra a resposta do sistema de suspensão ao degrau unitário utilizando a designação de polos por meio da realimentação de estado. O sistema conseguiu atingir a estabilidade em 0.961s e obteve um $M_p = 9,04\%$. Todavia, o sistema estabiliza com uma magnitude de sinal de saída igual a 83,5, caracterizando um mau desempenho em regime permanente, já que a resposta adquirida está muito distante da entrada de referência, o degrau unitário. Então, foi necessário aumentar a ordem do sistema, adicionando-se um integrador à planta. Isso foi feito acrescentando-se mais uma coluna de valores zeros na matriz de estado e mais uma linha com zero na matriz de entrada para tornar o sistema de ordem $n + 1$, adicionando assim, mais um polo no sistema e eliminando o erro em regime.

Figura 16: Sistema projetado por alocação de polos sem integrador



A Figura 17 apresenta o resultado final do projeto do controlador do sistema de suspensão ativa utilizando o método de alocação de polos via realimentação de estado completo.

Figura 17: Sistema projetado por alocação de polos com integrador



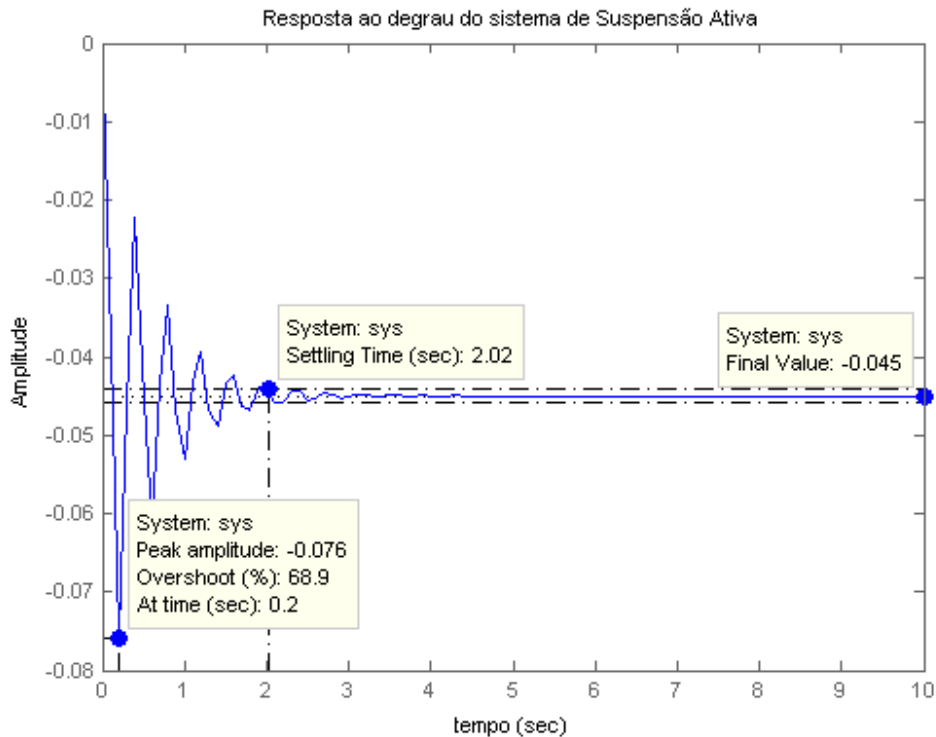
Através da Figura 17, pode-se ver que o sistema não apresenta mais o erro em regime, concluindo-se que após a adição do integrador, o sistema aumentou substancialmente seu desempenho. Os valores de $M_p = 8,64\%$ e $t_s = 1s$ aumentaram, porém são valores que ainda estão dentro da faixa dos requisitos do projeto, no qual deve-se ter um valor máximo de $M_p = 10\%$ e que o tempo de acomodação seja igual a $t_s = 1s$.

4.2 RESULTADO DO SISTEMA DE SUSPENSÃO ATIVA COM O CONTROLADOR *LQR*

Utilizando o controlador *LQR*, o sistema estabilizou-se como o pretendido, porém houve o custo adicional para o sistema encontrar matrizes hermitianas **Q** e **R** adequadas para o sistema, o que não ocorre no método realizado por alocação de polos. A Figura 18 mostra o primeiro resultado obtido do sistema utilizando o controlador *LQR*. O sistema oscila por conta dos seus polos estarem ao longo do eixo

$j\omega$ e possui erro em regime permanente alto, o que são considerados resultados ruins para o sistema, por não está dentro dos requisitos propostos.

Figura 18: Sistema com controlador LQR sem integrador

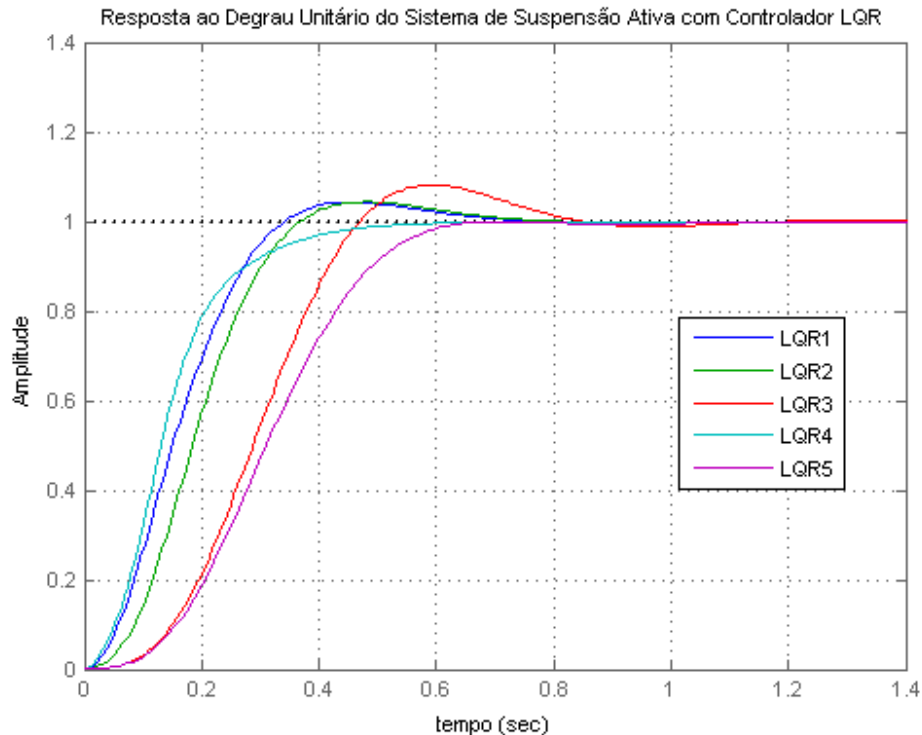


Para melhorar o desempenho do sistema utilizando o controlador LQR , foi necessário utilizar um integrador para eliminar o erro em regime gerado.

Realizando os ajustes das matrizes hermitianas \mathbf{Q} e \mathbf{R} , foi possível encontrar valores para as matrizes que melhorassem as características do sistema, melhorando até mesmo a velocidade da resposta deste.

A Figura 19 apresenta apenas 5 dos 210 resultados adquiridos (os resultados mostrados são referentes às matrizes \mathbf{Q} e \mathbf{R} já apresentadas na Tabela 2 na Seção Metodologia). Todavia, é válido ressaltar que os 210 resultados encontrados durante o desenvolvimento do trabalho utilizando o controlador LQR foram melhores do que quando utilizando o controlador projetado pelo método de alocação de polos.

Figura 19: Respostas do Sistema ao Degrau Unitário com Controlador LQR



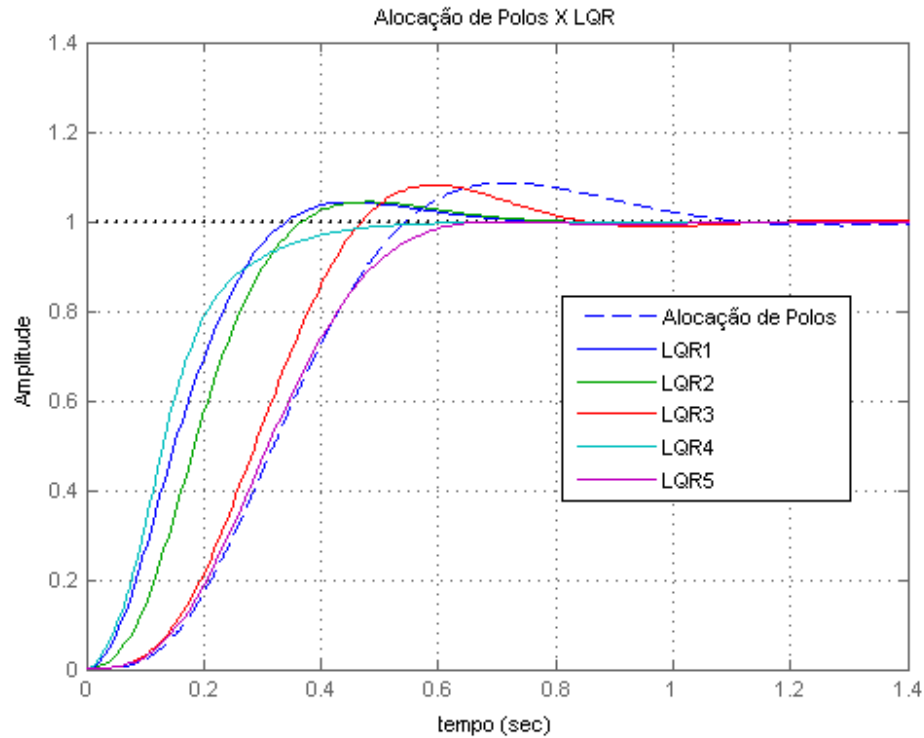
A Tabela 5 apresenta a máxima sobre-elevação e o tempo de acomodação do sistema em relação aos gráficos apresentados na Figura 19.

Tabela 5: Características do Sistema com o Controlador LQR

Sistema	t_s (s)	M_p (%)
LQR 1	0,601	3,86
LQR 2	0,637	4,28
LQR 3	0,781	8,09
LQR 4	0,455	0
LQR 5	0,594	0,022

Através das informações da Tabela 5, percebe-se que o sistema com o controlador LQR apresentou menor máxima sobre-elevação e menor tempo de acomodação em relação ao método por alocação de polos, que como já visto, apresentou um valor de $M_p = 9,04\%$ e $t_s = 0.961s$. Em adição a isso, o sistema com o controlador LQR é ótimo. A Figura 20 mostra as respostas geradas pelo sistema utilizando o controlador LQR em relação ao sistema utilizando a técnica de alocação de polos.

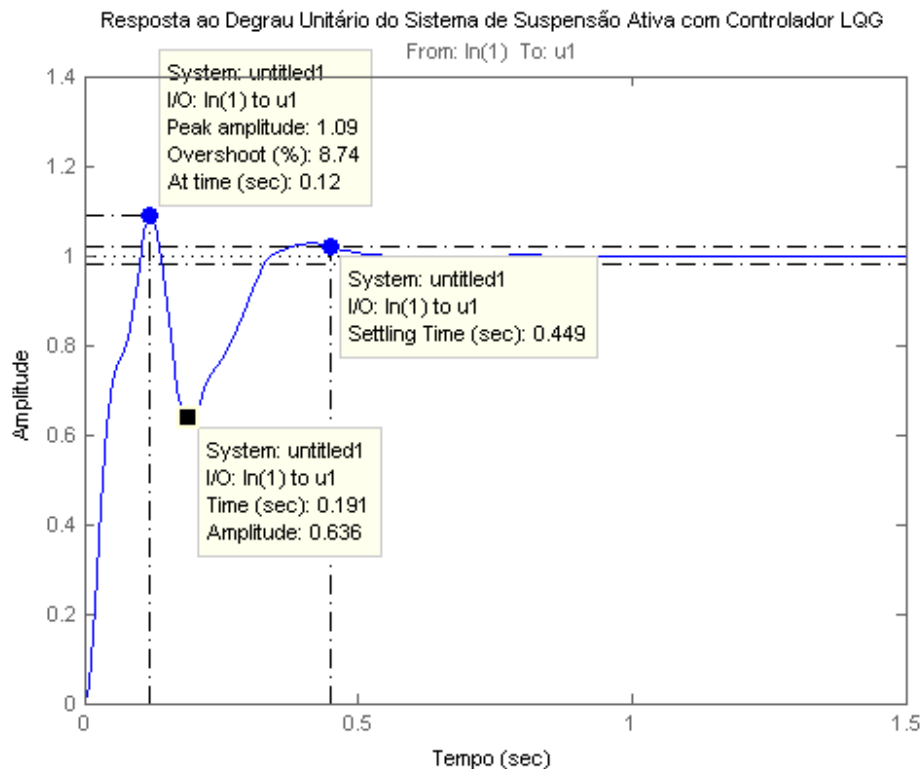
Figura 20: Respostas ao Degrau Unitário do Sistema de Suspensão Ativa - Alocação de Polos X LQR



4.3 RESULTADO DO SISTEMA DE SUSPENSÃO ATIVA COM O CONTROLADOR LQG

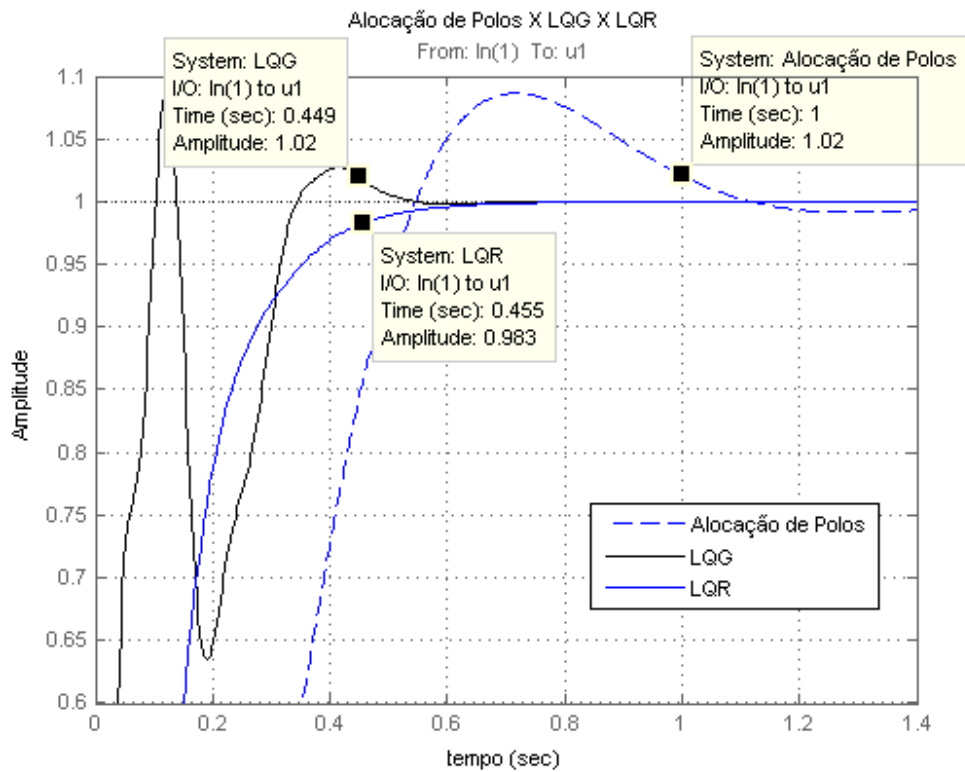
A Figura 21 apresenta a resposta ao degrau unitário do sistema de suspensão ativa utilizando o controlador LQG . Esse foi o resultado mais interessante adquirido através da abordagem computacional utilizada considerando um ruído aleatório nas equações de estado e saída já mencionado no capítulo Metodologia. Assim, como no LQR , foi necessário realizar testes para encontrar valores das matrizes hermitianas \mathbf{Q} e \mathbf{R} que colaborassem com o desempenho do sistema.

Figura 21: Resposta do sistema ao degrau unitário utilizando o controlador *LQG*



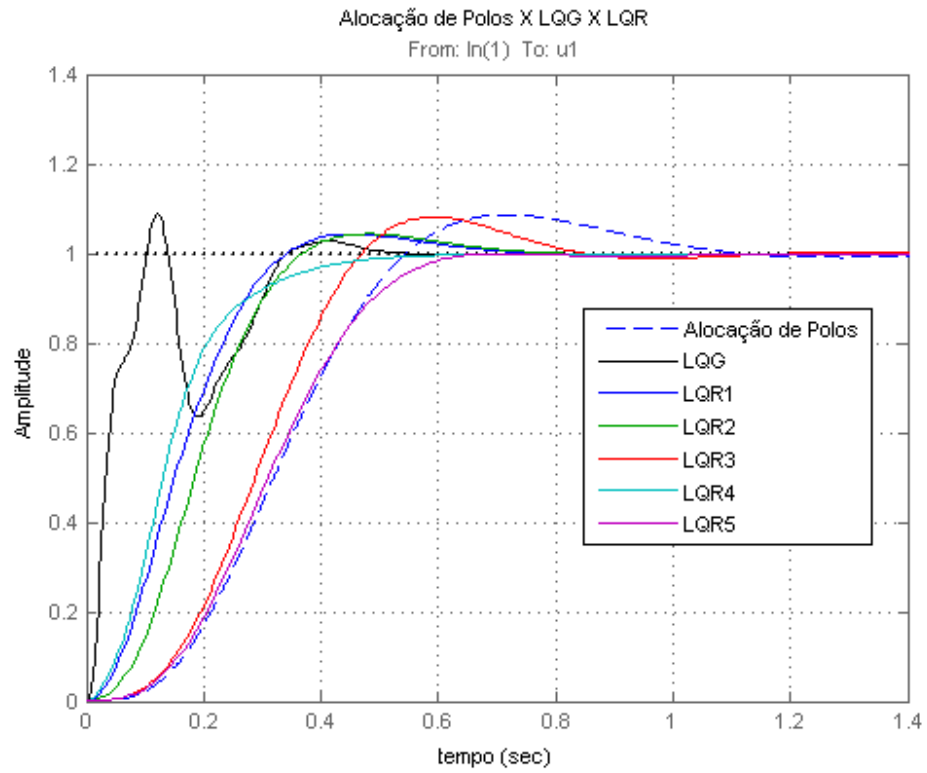
Através da Figura 21, é possível observar que o sistema possui uma máxima sobre-elevação $M_p = 8,74\%$ (o que é menor do que 10%) e um tempo de acomodação $t_s = 0,449s$. O que significa que o sistema se estabiliza rapidamente, além de ser robusto. A resposta do sistema utilizando o controlador *LQG* foi satisfatória, assim como dos outros controladores já abordados, porém a resposta com *LQG* apresentou uma oscilação inicial relevante, levando a resposta do sistema a uma amplitude de $0,636$ aproximadamente. Apesar dessa oscilação, o sistema com o controlador *LQG* obteve um tempo de acomodação e uma máxima sobre-elevação menores do que a resposta do sistema utilizando o método por alocação de polos como é possível observar através da Figura 22. Já com relação à resposta do sistema de suspensão utilizando o controlador *LQR*, a resposta desse sistema utilizando o *LQG* apresentou uma melhora em termos de tempo de acomodação e máximo sobressinal em alguns dos casos já apresentados do sistema com o controlador *LQR*. Contudo, houve uma resposta do sistema com *LQR* que praticamente não apresentou máxima sobre-elevação e adquiriu um tempo de acomodação bastante próximo ao do sistema utilizando o *LQG*, além de não apresentar nenhuma oscilação como no caso do *LQG*. Isso pode ser visto ainda na Figura 22. Todavia, é necessário levar em consideração que o sistema com *LQR* não apresenta robustez, diferentemente do *LQG*.

Figura 22: Gráfico comparativo entre Alocação de Polos, LQG e LQR



Por fim, a Figura 23 reúne todas as respostas do sistema de suspensão ativa analisadas mostrando que todos os resultados adquiridos ficaram dentro das especificações consideradas, ou seja, que todas as respostas tiveram um tempo de acomodação, $t_s \leq 1s$ e com uma máxima sobre-elevação, $M_p \leq 10\%$, além de todas as respostas obedecerem o critério de 2% em relação ao seu valor final, respectivamente.

Figura 23: Respostas do Sistema de Suspensão Ativa ao Degrau Unitário Utilizando as Técnicas de Alocação de Polos, LQR e LQG



5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Através deste trabalho, foi possível conhecer e utilizar técnicas de Sistemas de Controle importantes, vistas na literatura e que têm sido valorizadas em muitas aplicações em benefício da sociedade. Esta monografia visou colaborar para a pesquisa e desenvolvimento, dando sua parcela de contribuição para o aperfeiçoamento da área acadêmica. Este trabalho pode ser utilizado como base para a realização de outros, pois neste foi tratado de conceitos mais simples, considerados o mínimo requerido para os projetos de controle, a conceitos de controladores mais complexos e que utilizam uma abordagem mais aprimorada.

Todos os controladores projetados contribuíram de forma efetiva para o desempenho do sistema de suspensão ativa considerado. O método de controle LQR , se comparado ao sistema sem nenhum controlador, garante que o sistema sempre se estabilize, além de produzir bons índices de desempenho (considerando os ajustes realizados nas matrizes hermitianas \mathbf{Q} e \mathbf{R}). O sistema com o controlador LQG , além de adquirir a característica ótima, considera possíveis incertezas na planta, garantindo um certo grau de robustez ao sistema, mesmo considerando que o LQG deverá passar pelo procedimento de recuperação de malha conhecido como LQG/LTR .

Deslocando-se todos os polos do sistema de suspensão para posições mais convenientes, através do método por Alocação de Polos, baseado em realimentação de estado completo, também foi possível chegar a resultados interessantes para o sistema, podendo esses resultados serem comparados com os obtidos através dos reguladores quadráticos ótimos.

Por meio das técnicas de controle abordadas, pode-se dizer que os objetivos e resultados adquiridos foram satisfatórios. Todavia, é válido frisar que posteriormente deverá ser avaliado o esforço de controle do sistema utilizando tais técnicas, devendo-se levar em consideração as limitações existentes no mesmo.

Durante o desenvolvimento do projeto, dificuldades foram encontradas em alguns aspectos, tais como a falta de conhecimento detalhado sobre o funcionamento de um sistema de suspensão ativa que, em alguns momentos ficou caracterizada pela não disponibilização de informações pelo fabricante da planta de maneira que o trabalho precisou ser baseado apenas nas informações mais relevantes sobre o modelo.

Sendo assim, mais estudos serão realizados sobre as limitações do sistema, de forma que o comportamento do sistema seja simulado o mais próximo da realidade, sendo possível o seguinte: considerar a intensidade da força (entrada aplicada); a

oscilação da estrada, z_r , como uma perturbação no sistema; variações nos parâmetros da planta; e realizar a análise da saída em questão, z_2 . Esses testes serão feitos para verificar a robustez do sistema de suspensão. Ademais, os controladores elaborados deverão ser testados na ferramenta auxiliar *SIMULINK*, de forma que o sistema seja submetido a testes ainda mais consistentes.

Pretende-se dar seguimento a este trabalho realizando o desenvolvimento de um controle ótimo e robusto utilizando a técnica H_2 , visando adquirir resultados, se possível, ainda melhores do que os adquiridos com as técnicas tratadas neste trabalho.

Em vista disso, pode-se dizer que é possível dar continuidade buscando novas formas de melhorar o desempenho do sistema em malha fechada, através do melhoramento das técnicas já aplicadas ou por meio de novas técnicas mais sofisticadas encontradas na literatura.

REFERÊNCIAS

- AGUIRRE, L. A. **Enciclopédia de Automática: Controle e Automação**. 1. ed. São Paulo: Blucher, 2007.
- CÔRTE-REAL, E. W. **Dessensibilização da Estrutura de Controle LQG Aplicada ao Modelo de uma Suspensão Ativa Utilizando a Técnica PRABI**. Rio de Janeiro: Instituto Militar de Engenharia, 2002. Disponível em: <http://www.pgee.ime.eb.br/pdf/edilmar_real.pdf>. Acesso em: 29 jul. de 2012.
- DORF, R. C.; BISHOP, R. H. **Sistemas de Controle Modernos**. 11. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2009.
- DOYLE, J. C. **Guaranteed margins for LQG regulators**. [S.l.]: IEEE Transactions on Automatic Control, 1978. 756–7 p. Acesso em: 8 nov. de 2011.
- FRANKLIN, G. F.; POWELL, J. D.; EMAMI-NAEINI, A. A. **Feedback Control and Dynamic Systems**. 2. ed. [S.l.]: Addison Wesley, 1991.
- KANIESKI, J. M. **Modelagem e Controle LQR Aplicado a um Condicionador de Energia**. Pato Branco-PR: UTFPR, 2010. Disponível em: <<http://repositorio.utfpr.edu.br/jspui/handle/1/224>>. Acesso em: 09 Ago. de 2012.
- KWAKERNAAK, H.; SIVAN, R. **Linear Optimal Control Systems**. [S.l.]: Wisley, 1972.
- MACIEJOWSKI, J. **Multivariable Feedback Design**. [S.l.]: Addison Wesley, 1989.
- NISE, N. S. **Engenharia de Sistemas de Controle**. 3. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2002.
- OGATA, K. **Engenharia de Controle Moderno**. 4. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2003.
- OGATA, K. **Engenharia de Controle Moderno**. 5. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2010.
- PINTO, V. P. **Controladores Robustos LQG/LTR com Ação Integral Aplicados ao controle de Geradores Eólicos Interligados ao Sistema de Distribuição de Energia Elétrica Baseados em Máquina de Indução Duplamente Alimentada**. Fortaleza: UFC, 2012. Disponível em: <http://www.ppgee.ufc.br/wp-content/uploads/2012/05/TESE_Vandilberto.pdf>. Acesso em: 09 Ago. de 2012.
- PRADO, M. L. M. **Controle Multivariável Aplicado a Sistemas com Atraso**. São Carlos: USP, 2001.
- QUANSER. **Active Suspension System**. 2009. Disponível em: <<http://www.quanser.com>>. Acesso em: 23 jul. de 2012.
- RUGH, W. J. **Linear System Theory**. 2. ed. New Jersey: Prentice Hall, 1996.
- SELLOW, R.; VEIGA, S. L. **Controlador do Tipo LQG (Linear Quadrático Gaussiano)**. Curitiba: UnicenP, 2005. 155–172 p. Disponível em: <<http://www.up.com.br/davinci/2/12.pdf>>. Acesso em: 18 Nov. de 2012.

SILVA, W. P. da; GRANDINETTI, F. J. Modelagem e simulação de elementos empregados em suspensões veiculares ativas. **Revista Ciências Exatas**, v. 11, n. 2, p. 23–29, 2005. Disponível em: <<http://periodicos.unitau.br/ojs-2.2/index.php/exatas/article/viewFile/353/484>>. Acesso em: 29 jul. de 2012.

XUE, D.; CHEN, Y.; ATHERTON, D. P. **Linear Feedback Control: Analysis and Design with MATLAB**. [S.l.]: SIAM, 2007.