



**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE FEIRA DE SANTANA**  
**BACHARELADO EM ENGENHARIA DE COMPUTAÇÃO**

**TASSALON FERREIRA DA SILVA**

**PROJETO DE CONTROLADORES ROBUSTOS PARA UM SISTEMA DE DOIS  
TANQUES**

**FEIRA DE SANTANA**  
**2012**

**TASSALON FERREIRA DA SILVA**

**PROJETO DE CONTROLADORES ROBUSTOS PARA UM SISTEMA DE DOIS  
TANQUES**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Colegiado de Engenharia de Computação como requisito parcial para obtenção do grau de Bacharel em Engenharia de Computação da Universidade Estadual de Feira de Santana.


Orientadora: Profa. Dra. Márcia Lissandra  
Machado Prado

FEIRA DE SANTANA  
2012

## JULGAMENTO

Aluno(a): **TASSALON FERREIRA DA SILVA**

Monografia apresentada e julgada em 10 de Janeiro de 2013 perante a banca examinadora:

  
\_\_\_\_\_  
Prof. Dra. Marcia Lissandra Machado Prado  
(Universidade Estadual de Feira de Santana- DTEC/ UEFS)

Aprovado

  
\_\_\_\_\_  
Prof. Me. Thiago Cerqueira de Jesus  
(Universidade Estadual de Feira de Santana- DTEC/ UEFS)

APROVADO

  
\_\_\_\_\_  
Prof. Me. Armando Sanca Sanca  
(Universidade Estadual de Feira de Santana - DTEC/ UEFS)

Aprovado

  
\_\_\_\_\_  
Coordenador(a) do Colegiado do Curso de Engenharia de Computação

Dedico este trabalho aos meus pais, Maria Gilda Ferreira da Silva e José Abiderman Lopes da Silva, por todo o apoio que recebi ao longo de meus estudos, por confiarem e acreditarem em mim e por todo o amor que me deram até hoje.

## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço a Deus e a meus pais pelas oportunidades que tive na vida. Agradeço ainda a meus amigos e companheiros de estudo, Roquelson Ferreira, Tiago Oliveira, Charlene Almeida, Karine Almeida, Nils Bergsten, Luan Oliveira, Rafael Tosta, Marcelo Miranda, Jody Matos, Fábio Bispo, Rubens Rodrigues e demais colegas de curso por cada aprendizado compartilhado, cada ajuda e cada momento de alegria e diversão que passamos juntos durante esses últimos anos. Além de familiares e demais amigos por estarem sempre ao meu lado contribuindo para a realização de meus sonhos. Agradeço aos meus professores e a minha orientadora, Márcia Lissandra Machado Prado, por todo o esforço e dedicação que demonstrou em me auxiliar no desenvolvimento deste trabalho.

## RESUMO

Este trabalho de conclusão de curso propõe o projeto de controladores robustos para o Sistema de Dois Tanques Acoplados da *Quanser* usando, para isso, conceitos de análise intervalar e controle ótimo e, em seguida, são apresentados os principais resultados. Também são realizadas comparações dos controladores desenvolvidos com técnicas de controle tradicionais a fim de avaliar os resultados e validar as vantagens do uso de controladores robustos. Os resultados e as comparações são realizados em ambientes de simulação usando o software *MATLAB*<sup>®</sup> que permite de forma ampla modelar e simular os mais variados sistemas de controle.

**Palavras-chave:** Sistema de Controle. Controle Robusto. Controle Ótimo. Intervalos Modais. Sistema de Dois Tanques Acoplados.

## ABSTRACT

This monograph proposes the design of robust controllers for the system of two tanks of the Quanser, using to this, concepts of modal interval analysis and of optimal control, and then presents the main results. It also makes comparisons of the controllers developed with traditional control techniques to assess the results and validate the advantages of the use of robust controllers. The results and comparisons are performed in simulation environments using the *MATLAB*<sup>®</sup> that can model and simulate a wide variety of control systems.

**Keywords:** Control Systems. Robust Control. Optimal Control. Modals Intervals. Two Tanks System.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1	Resposta de um sistema de segunda ordem para diversos valores de $\xi$ .	15
Figura 2	Sistema realimentado ou de malha fechada.	16
Figura 3	Sistema sem realimentação ou de malha aberta.	16
Figura 4	Gráfico do plano $s$ com polos à esquerda do eixo $j\omega$ , sendo o sistema estável.	17
Figura 5	Erro estacionário de um sistema em resposta ao degrau.	19
Figura 6	Controle PID de uma Planta.	20
Figura 7	controlador PD do sistema $G_p$ .	21
Figura 8	controlador PD com realimentação de velocidade do sistema $G_p$ .	21
Figura 9	Configuração do Sistema de Dois Tanques para o projeto dos controladores.	34
Figura 10	Diagrama de bloco do Sistema de Dois Tanques feito no Simulink.	36
Figura 11	Resposta do sistema em malha aberta a uma entrada degrau padrão.	38
Figura 12	Resposta ao degrau do sistema com realimentação.	38
Figura 13	Diagrama de blocos do controlador PD com realimentação de velocidade.	39
Figura 14	Polo $p$ posicionado sobre um dos zeros do sistema.	44



Figura 15	Sistema de controle de malha fechada com realimentação de estados.	48
Figura 16	Resposta do sistema variando os parâmetros P1, P2 e P3 da planta.	51
Figura 17	Resposta do controlador Tradicional.	52
Figura 18	Resposta do controlador Robusto.	52
Figura 19	Resposta ao degrau unitário do controlador PID Robusto.	54
Figura 20	Comparação entre Controlador Robusto e Tradicional.	55
Figura 21	Modelagem do Sistema de Dois Tanques com controlador PID feito no Simulink.	56
Figura 22	Resposta dos Controladores PID Robusto e Tradicional para uma entrada com amplitude igual a 10.	57
Figura 23	Resposta do Controlador LQR para diferentes valores da matriz de realimentação $K$ .	58
Figura 24	Comparação entre controle por Alocação de Polos e controle LQR.	59
Figura 25	Comparação entre controle LQR e controle PID Robusto.	60
Figura 26	Comparação entre controle PID Robusto e LQR.	61

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1	Erro estacionário em relação ao sinal de entrada e tipo do sistema.	19
Tabela 2	Valores utilizados na modelagem do sistema.	36
Tabela 3	Definição dos parâmetros do sistema da <i>Quanser</i> em malha fechada.	40
Tabela 4	Resultados obtidos com as variações das matrizes hermitianas.	49
Tabela 5	Especificações da primeira simulação.	50
Tabela 6	Especificações do controlador tradicional e do robusto.	51
Tabela 7	Especificações da simulação do Controlador PID.	53
Tabela 8	Valores adotados na comparação do Controlador Tradicional com o Robusto.	54
Tabela 9	Valores da matriz de realimentação $K$ obtidos com as variações das matrizes hermitianas e usadas na simulação.	58

## LISTA DE SÍMBOLOS

$\xi$	Coeficiente de amortecimento
$\omega_n$	Frequência natural não amortecida
$M_p$	Máxima sobre-elevação
$t_s$	Tempo de estabelecimento
$k_p$	Constante de ação proporcional
$k_i$	Constante de ação Integral
$k_d$	Constante de ação derivativa
$J$	Índice de Desempenho do Regulador Quadrático Linear
$T$	Transposta
$g$	Aceleração da gravidade em $cm/s^2$
$L_1$	Nível da água no primeiro tanque em $cm$
$k_m$	Constante da bomba do Sistema de Dois Tanques da <i>Quanser</i>
$V_p$	Tensão aplicada a bomba do Sistema de Dois Tanques da <i>Quanser</i>
$a_1$	Diâmetro do orifício do primeiro Tanque do Sistema de Dois Tanques da <i>Quanser</i>
$a_2$	Diâmetro do orifício do segundo Tanque do Sistema de Dois Tanques da <i>Quanser</i>
$A_1$	Área do primeiro Tanque do Sistema de Dois Tanques da <i>Quanser</i>
$A_2$	Área do segundo Tanque do Sistema de Dois Tanques da <i>Quanser</i>
$L_2$	Nível da água no segundo tanque em $cm$
P1	Parâmetro do Sistema de Dois Tanques
P2	Parâmetro do Sistema de Dois Tanques
P3	Parâmetro do Sistema de Dois Tanques

## LISTA DE SIGLAS

*MATLAB*<sup>®</sup>

PID

PD

PI

LQR

*MATrix LABORatory*

Proporcional, Integral e Derivativo

Proporcional-Derivativo

Proporcional-Integral

Regulador Quadrático Linear

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>12</b>
<b>2</b>	<b>FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA</b>	<b>14</b>
2.1	SISTEMAS DE CONTROLE	14
2.1.1	REALIMENTAÇÃO	16
2.1.2	ESTABILIDADE	17
2.1.3	ERRO ESTACIONÁRIO	18
2.2	CONTROLADORES PID	20
2.3	TEORIA DE CONTROLE ROBUSTO	21
2.4	SISTEMAS DE CONTROLE NO ESPAÇO DE ESTADOS	22
2.4.1	REPRESENTAÇÃO EM ESPAÇO DE ESTADOS	23
2.4.2	CONTROLABILIDADE E OBSERVABILIDADE	24
2.4.3	REALIMENTAÇÃO DE ESTADOS	24
2.5	CONTROLE ÓTIMO	26
2.5.1	REGULADOR QUADRÁTICO LINEAR	26
2.6	ANÁLISE INTERVALAR	28
2.6.1	ANÁLISE INTERVALAR CLÁSSICA	28
2.6.2	ANÁLISE INTERVALAR MODAL	28
2.7	SISTEMA DE DOIS TANQUES	33
<b>3</b>	<b>METODOLOGIA</b>	<b>35</b>
3.1	MODELAGEM DO SISTEMA DE DOIS TANQUES	35
3.2	PROJETO DE UM CONTROLADOR ROBUSTO PD COM REALIMENTAÇÃO DE VELOCIDADE USANDO ANÁLISE INTERVALAR MODAL	39
3.3	PROJETO DE UM CONTROLADOR ROBUSTO PID USANDO ANÁLISE INTERVALAR MODAL	42
3.4	PROJETO DE UM CONTROLADOR POR ALOCAÇÃO DE POLOS	45
3.5	PROJETO DE UM CONTROLADOR ÓTIMO LQR	48
<b>4</b>	<b>RESULTADOS</b>	<b>50</b>
4.1	RESULTADO DO CONTROLE ROBUSTO PD COM REALIMENTAÇÃO DE VELOCIDADE USANDO ANÁLISE INTERVALAR MODAL	50
4.2	RESULTADO DO CONTROLE ROBUSTO PID COM REALIMENTAÇÃO DE VELOCIDADE USANDO ANÁLISE INTERVALAR MODAL	53

4.3	RESULTADO DO CONTROLE ÓTIMO .....	57
<b>5</b>	<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS.....</b>	<b>62</b>
	<b>REFERÊNCIAS.....</b>	<b>64</b>

## 1 INTRODUÇÃO

O primeiro trabalho significativo de controle automático foi desenvolvido por James Watt para o controle de velocidade de uma máquina a vapor no século XVIII (OGATA, 2010). Outros trabalhos importantes no início da teoria de controle foram realizados por Minorsky, que mostrou que a estabilidade de sistemas poderia ser determinada por equações diferenciais, e Hazen, que discutiu o projeto de servomecanismos a relé, além de Nyquist, que desenvolveu um procedimento simples para determinar a estabilidade de sistemas de malha fechada (OGATA, 2010).

Os sistemas de controle possibilitam realizar trabalhos que anteriormente eram muito difíceis ou até mesmo impossíveis de se realizar (NISE, 2002). Pode-se citar como exemplos a ação de mover grandes equipamentos com precisão, realizar o apontamento de imensas antenas, controlar um braço robótico remotamente para manipular material radioativo, controlar a posição e velocidade de elevadores entre diversas outras aplicações (NISE, 2002).

Enquanto que a Engenharia se satisfaz por encontrar uma solução prática e que seja economicamente realizável, a Engenharia de Controle vai além, buscando de forma particular alcançar os limites físicos dos desempenhos de seus projetos para obter os melhores resultados possíveis. Ficando a engenharia de controle limitada apenas pelas leis da natureza e das abstrações matemáticas (AGUIRRE, 2007).

Na segunda metade do século XX, a disputa pela exploração do espaço entre os Estados Unidos e a União Soviética fez a área de controle avançar ainda mais. Isso fez novas teorias surgirem como a de controle robusto e ótimo, teorias no espaço de estados para sistemas lineares e não-lineares, controle estocástico e controle digital (AGUIRRE, 2007). Consequentemente, isso trouxe grandes avanços para o cotidiano da sociedade moderna.

Atualmente os sistemas de controle são utilizados nas mais diversas áreas da indústria, se tornando essenciais em qualquer campo da engenharia e da ciência (OGATA, 2010). Exemplos de sua utilização estão em sistemas robóticos, veículos espaciais e em operações industriais que envolvam o controle de temperatura, vazão, pressão, entre outros (OGATA, 2010). Esses sistemas necessitam de cada vez mais precisão para atender às diversas necessidades da indústria e da sociedade.

A teoria de controle robusto considera que o sistema físico a ser controlado não pode ser modelado com exatidão. Há também a possibilidade de interferências por meio de ruídos em sensores e perturbações imprevisíveis. Isso gera valores inesperados que o controlador deve ser capaz de tratar. Para o projeto de

controladores altamente precisos mesmo na presença de consideráveis incertezas é conveniente recorrer a sistemas de controle robustos (DORF; BISHOP, 2009).

Um dos sistemas muito utilizados tanto na indústria quanto na área móbil, nos carros, ônibus, caminhões e tratores, são os sistemas hidráulicos. Nos tratores, por exemplo, os sistemas hidráulicos são utilizados no acionamento, direção e posicionamento de implementos. Na aviação, a hidráulica tem um papel fundamental nos sistemas de controle das aeronaves modernas realizando o acionamento dos lemes, das asas, dos ailerons e dos trens de pouso (NEGRI, 2001).

Na indústria, os sistemas hidráulicos possibilitam realizar o controle de nível de líquidos que são comumente usados para misturar substâncias em processos químicos e na movimentação de líquidos para o resfriamento de equipamentos (SCHMIDT, 2008). O Sistema de Dois Tanques desenvolvido pela *Quanser* (QUANSER, 2004) é um exemplo de um sistema hidráulico, e muitas das suas configurações são aplicadas na indústria. Por isso, trata-se de um sistema didaticamente adequado para fins de projetos de controladores.

Neste trabalho de conclusão de curso são realizados projetos de controladores robustos para o sistema de Dois Tanques da *Quanser* (QUANSER, 2004) usando, para isso, conceitos de análise intervalar modal (GARDENES *et al.*, 2001; GROUP, 1998; PRADO, 2006; PRADO; PAZ, 2008) e de controle ótimo (AGUIRRE, 2007; FRANKLIN; POWELL; EMAMI-NAEINI, 1991; WANG; JING; ZHANG, 2008; ZHOU; DOYLE; GLOVER, 1996; ZHOU; DOYLE, 1996). Além disso, são feitas comparações dos controladores desenvolvidos com técnicas de controle tradicionais a fim de avaliar os resultados e validar as vantagens do uso de controladores robustos.

No capítulo 2 é feita uma revisão da literatura apresentando os principais conceitos relacionados a Sistemas de Controle, Controle Robusto, Controle Ótimo e Análise Intervalar Modal. No item Metodologia, capítulo 3, são mostrados detalhes da modelagem do Sistema de Dois Tanques da *Quanser*, enfocando as suas características para o projeto de sistemas de controle, além do desenvolvimento de controladores usando os conceitos de Análise Intervalar Modal e Controle Ótimo. Em Resultados, capítulo 4, são apresentados os testes realizados e comparações com outros projetos de controladores para o Sistema de Dois Tanques. Por fim, no capítulo 5, são apresentadas as conclusões dos resultados obtidos.



## 2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

### 2.1 SISTEMAS DE CONTROLE

Os sistemas físicos sejam eles mecânicos, hidráulicos ou elétricos, podem ser descritos através de modelos matemáticos utilizando as leis da física. Esses modelos matemáticos geralmente são expressos através de equações diferenciais ordinárias (DORF; BISHOP, 2009). Em muitos casos os modelos não são lineares, portanto precisam ser linearizados para que seja possível o projeto de controladores usando as técnicas clássicas de sistemas de controle. Para linearização de modelos não lineares pode-se utilizar a série de Taylor (OGATA, 2010).

Através da modelagem matemática do sistema físico a controlar deve-se extrair informações úteis para análise e projeto do sistema de controle. A transformada de Laplace é comumente usada para facilitar a obtenção destas informações sobre os sistemas de controle por simplificar os cálculos. Pode-se facilmente obter, através da transformada de Laplace, a resposta do sistema de controle, sua função de transferência, a sua equação característica e conseqüentemente seus polos e zeros (DORF; BISHOP, 2009).

A função de transferência é a relação entre a transformada de Laplace do sinal de saída e a transformada de Laplace do sinal de entrada do sistema. Deve-se considerar as condições iniciais nulas e o sistema como sendo linear e invariante no tempo. Através da função de transferência é possível obter as características dinâmicas de um sistema, porém a mesma não fornece informações sobre sua estrutura física (OGATA, 2010). A representação da função de transferência pode ser vista na Equação (1).

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{b_0s^m + b_1s^{m-1} + \dots + b_{m-1}s + b_m}{a_0s^n + a_1s^{n-1} + \dots + a_{n-1}s + a_n} \quad (1)$$

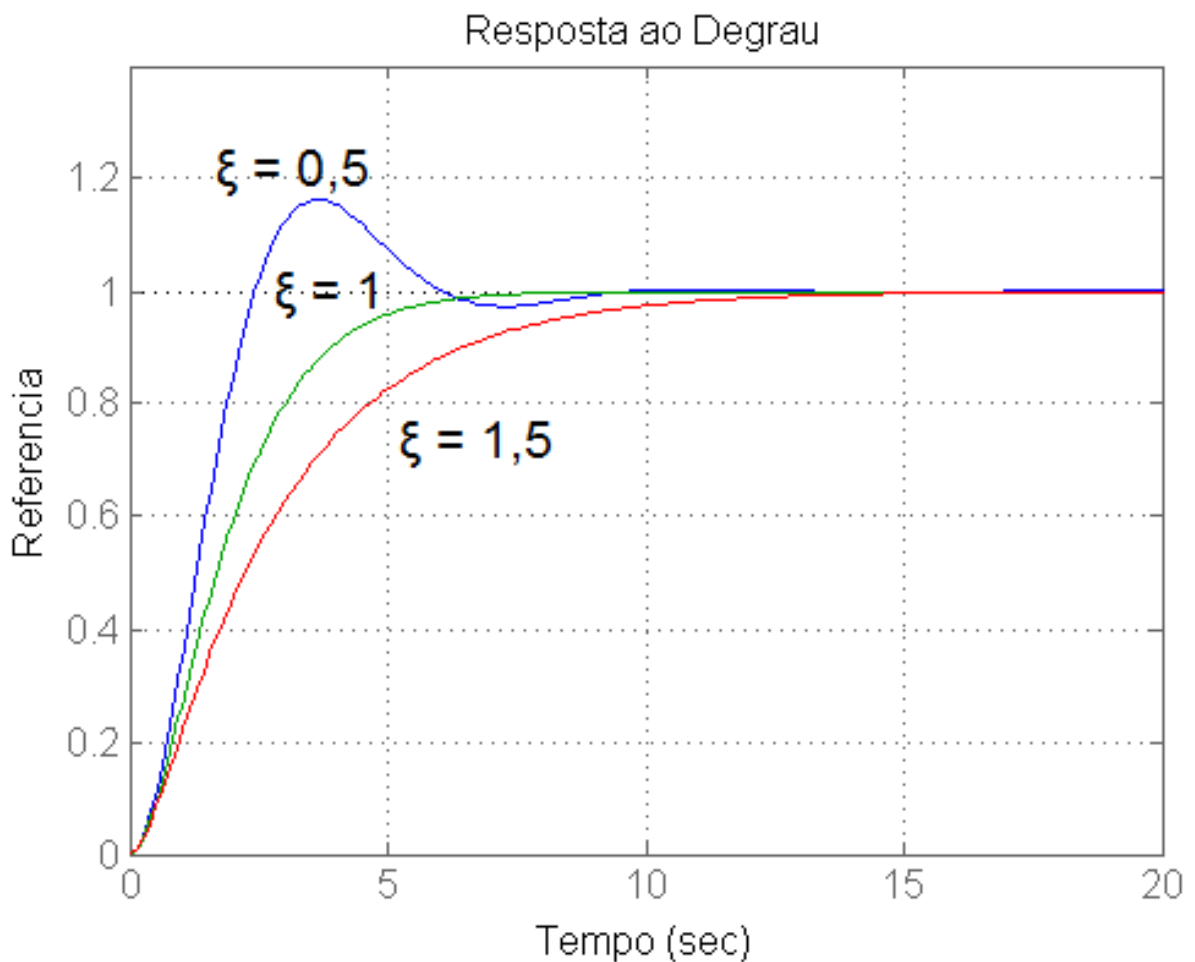
onde  $n$  e  $m$  são inteiros e  $n$  representa a ordem do sistema.  $Y(s)$  é a saída do sistema e  $X(s)$  é a entrada. As variáveis  $a$  e  $b$  são coeficientes e  $s$  representa uma variável complexa.

As raízes do polinômio do numerador da função de transferência são os zeros do sistema, as raízes do polinômio do denominador são os polos e com essas informações pode-se entender melhor a característica dinâmica do sistema em análise (DORF; BISHOP, 2009). Em um sistema de segunda ordem a função de transferência pode ser representada genericamente pela Equação (2).

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \quad (2)$$

onde  $\xi$  é o coeficiente de amortecimento e  $\omega_n$  é a frequência natural não amortecida. Quando  $\xi > 1$  o sistema é superamortecido e não há oscilações na resposta do sistema, mas a sua estabilização é lenta. Para  $0 < \xi < 1$  o sistema é subamortecido e há oscilações durante a resposta transitória do sistema, porém o sistema pode se estabilizar mais rapidamente. Se  $\xi = 1$  o sistema é chamado de criticamente amortecido (OGATA, 2010). A Figura 1 ilustra a resposta de um sistema de segunda ordem para diferentes valores de  $\xi$ .

**Figura 1: Resposta de um sistema de segunda ordem para diversos valores de  $\xi$ .**



O maior pico apresentado pela resposta do sistema é chamado de máxima sobre-elevação, ou  $M_p$ . A máxima sobre-elevação, em muitos casos, é utilizada como especificação de desempenho nos projetos dos controladores, ou seja, o controlador é desenvolvido de forma a não ultrapassar uma máxima sobre-elevação desejada. A

Equação (3) apresenta o cálculo da máxima sobre-elevação de um sistema em função de  $\xi$  (OGATA, 2010).

$$M_p = e^{\left(\frac{-\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}\right)} \times 100\% \quad (3)$$

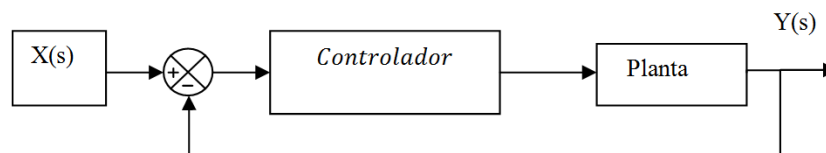
Outra especificação de desempenho para o projeto de controladores está relacionada com o tempo de acomodação do sistema. Também chamado de tempo de estabelecimento, ou simplesmente  $t_s$ , consiste no tempo necessário para que a resposta do sistema alcance uma determinada faixa, geralmente de 2% a 5%, em torno do valor final, permanecendo dentro dessa faixa enquanto não ocorrer alteração no sinal de entrada do sistema. A Equação (4) apresenta o cálculo do tempo de estabelecimento de um sistema, com critério de 5%, em função de  $\xi$  e  $\omega_n$  (OGATA, 2010).

$$t_s = \frac{3}{\xi \omega_n} \quad (4)$$

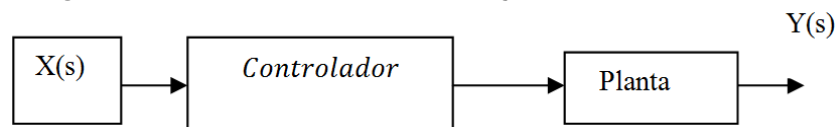
### 2.1.1 Realimentação

A realimentação em um sistema de controle consiste em utilizar o sinal de saída do sistema para compará-lo com o sinal desejado (sinal de referência), gerando um sinal de erro resultante que é utilizado como meio de controle para o sistema, como mostrado na Figura 2. Os sistemas sem realimentação, ou de malha aberta, geram diretamente uma saída em resposta ao sinal de entrada, como pode ser visto na Figura 3 (DORF; BISHOP, 2009).

**Figura 2: Sistema realimentado ou de malha fechada.**



**Figura 3: Sistema sem realimentação ou de malha aberta.**



Os sistemas com realimentação também são comumente chamados de sistemas de controle de malha fechada. A realimentação visa reduzir o erro do sistema

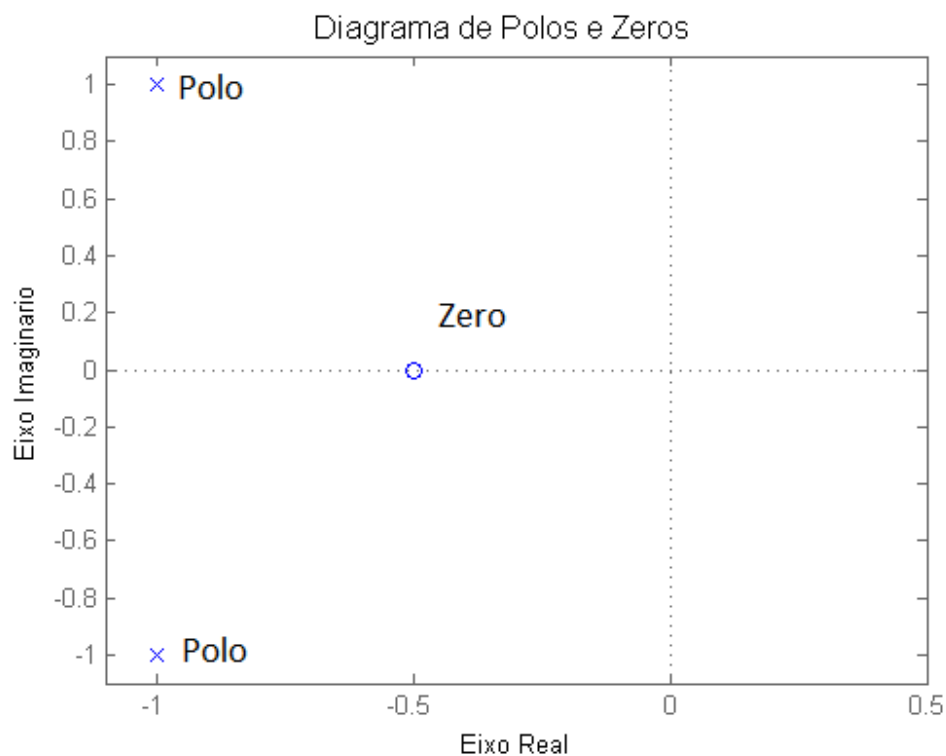
tornando-o mais insensível a grandes variações na entrada e até mesmo a possíveis perturbações que podem ocorrer (OGATA, 2010).

### 2.1.2 Estabilidade

A estabilidade é um objetivo imprescindível no projeto de sistemas de controle. Conhecer as condições necessárias para tornar um sistema estável e suas limitações para mantê-lo dentro dos limites da estabilidade é essencial para a eficácia de qualquer sistema de controle. Um sistema de controle de malha fechada instável geralmente não tem nenhuma aplicação real, por isso busca-se utilizar procedimentos e ferramentas que contribuam para o projeto de sistemas estáveis (DORF; BISHOP, 2009).

A partir da localização dos polos de malha fechada de um sistema, no plano  $s$ , é possível determinar sua estabilidade. Quando todos os polos encontram-se no lado esquerdo do eixo  $j\omega$  o sistema é estável, como pode ser visto na Figura 4. Por outro lado, o sistema é instável quando qualquer um dos polos estiver no semiplano direito do plano  $s$  (OGATA, 2010). Com isso, percebe-se que a estabilidade ou instabilidade de um sistema é uma propriedade do próprio sistema e não depende da sua entrada.

**Figura 4: Gráfico do plano  $s$  com polos à esquerda do eixo  $j\omega$ , sendo o sistema estável.**



O critério de estabilidade de Routh pode ser utilizado como uma forma simples de verificar a estabilidade de um sistema sem ter que fatorar o denominador da função de transferência em busca dos valores dos polos do sistema de malha fechada. Esse método determina o número de polos de malha fechada de um sistema que se encontram no lado direito do eixo  $j\omega$  do plano  $s$ . Com isso, pode-se concluir se o sistema é estável ou instável. É possível ainda, através do critério de estabilidade de Routh, especificar os limites dos parâmetros de projeto que levam um sistema a estabilidade (OGATA, 2010).

A análise da resposta em frequência de um sistema também pode ser utilizada para verificar sua estabilidade. Para isso, usa-se o critério de estabilidade de Nyquist que baseia-se no teorema de Cauchy e trata do mapeamento do contorno no plano  $s$  (DORF; BISHOP, 2009). Com isso tem-se outra possibilidade de avaliação da estabilidade de um sistema, agora usando resposta em frequência.

### 2.1.3 Erro Estacionário

O erro estacionário é a diferença entre o sinal de referência aplicado a um sistema e a sua saída em regime permanente a essa entrada como mostrado na Figura 5. Caso a saída coincida com o sinal de entrada então o erro estacionário é nulo. Este erro é um indicativo da precisão do sistema (OGATA, 2010). Geralmente o erro estacionário em sistemas realimentados é reduzido substancialmente quando comparado a sistemas de malha aberta (DORF; BISHOP, 2009).

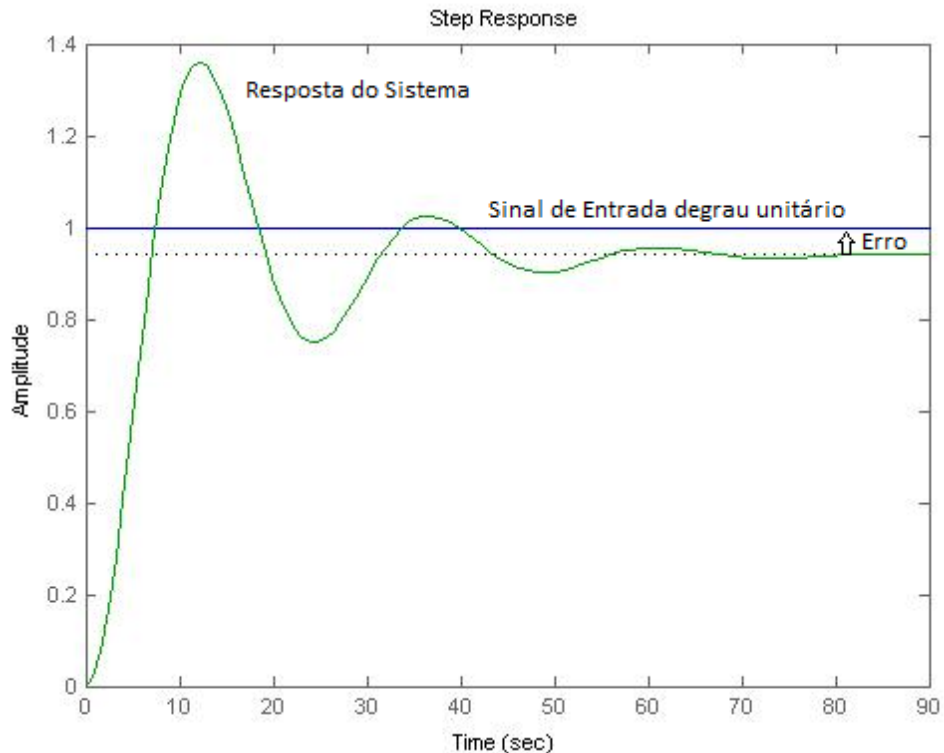
Esse erro pode ser gerado por diversos fatores, desde imperfeições nos componentes do sistema até a incapacidade do próprio sistema em seguir certos tipos de sinais de entrada (OGATA, 2010). O erro estacionário apresentado por um sistema em relação a uma entrada específica, como o degrau, a rampa ou parábola, está diretamente relacionado com a função de transferência de malha aberta desse sistema (OGATA, 2010).

A Equação (5) apresenta uma função de transferência onde o denominador tem um termo  $s^N$  que representa um polo de multiplicidade  $N$  na origem. Com isso, pode-se classificar os sistemas em função do número de integradores. Um sistema é chamado do tipo 0 quando  $N = 0$ , do tipo 1 quando  $N = 1$ , do tipo 2 quando  $N = 2$  e do tipo  $r$  quando  $N = r$  (OGATA, 2010).

$$G(s) = \frac{K(T_a s + 1)(T_b s + 1) \dots (T_m s + 1)}{s^N (T_1 s + 1)(T_2 s + 1) \dots (T_p s + 1)} \quad (5)$$

onde  $T_a, T_b \dots T_m, T_1, T_2 \dots T_p$  são coeficientes e  $K$  é um ganho. Conforme o

**Figura 5: Erro estacionário de um sistema em resposta ao degrau.**



tipo do sistema aumenta, maior é sua precisão, porém torna-se mais susceptível a instabilidades. A Tabela (1) apresenta o erro em regime estacionário de um sistema em relação ao sinal de entrada e o tipo do sistema. O erro estacionário apresentado na tabela está em função do ganho  $K$  do sistema. Verifica-se que nos casos onde o erro é finito seu valor diminui conforme o ganho aumenta. É possível perceber também que o desempenho em regime permanente do sistema é melhorado conforme integradores vão sendo adicionados ao sistema de malha aberta aumentando o tipo do sistema (OGATA, 2010).

**Tabela 1: Erro estacionário em relação ao sinal de entrada e tipo do sistema.**

Tipo   Entrada	Degrau $r(t) = 1$	Rampa $r(t) = t$	Aceleração $r(t) = \frac{1}{2}t^2$
Sistema do tipo 0	$\frac{1}{1+K}$	$\infty$	$\infty$
Sistema do tipo 1	0	$\frac{1}{K}$	$\infty$
Sistema do tipo 2	0	0	$\frac{1}{K}$

Fonte: Adaptada de (OGATA, 2010).

## 2.2 CONTROLADORES PID

Os controladores PID, de ação proporcional, integral e derivativa, são utilizados no controle de muitos processos industriais devido à ampla faixa de condições de operação e sua simplicidade (DORF; BISHOP, 2009).

A ação de controle proporcional tende a estabilizar o sistema. O controle proporcional também tem efeito direto sobre a velocidade da curva de resposta do sistema e no valor do erro em regime permanente (DORF; BISHOP, 2009).

Um sistema de controle integral tem o efeito de eliminar ou reduzir o erro estacionário do sistema aumentando assim a sua precisão. Percebe-se que uma planta, em resposta ao degrau, terá um erro estacionário quando sua função de transferência não possuir um fator integrador  $1/s$ . O controle integral também pode provocar uma resposta oscilatória indesejável (OGATA, 2010).

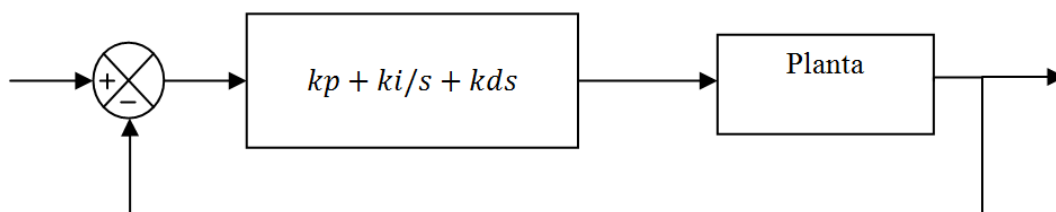
O controle derivativo realiza uma significativa correção antecipadamente, evitando que o erro atuante se torne alto, o que tende a aumentar a estabilidade do sistema. Este modo de controle é sempre utilizado em união com o controle proporcional pelo motivo de operar sobre a taxa de variação do erro atuante (OGATA, 2010).

O controlador PID consiste na união dos três modos aqui já citados. O PID melhora a resposta transitória e a resposta em regime permanente adicionando dois zeros e um polo ao sistema. A função de transferência de um controlador PID é apresentada na Equação (6).

$$G_c(s) = k_p + \frac{k_i}{s} + k_d s = \frac{k_d s^2 + k_p s + k_i}{s} \quad (6)$$

onde  $k_p$ ,  $k_i$  e  $k_d$  são constantes de ação proporcional, integral e derivativa, respectivamente. Outras manipulações podem ser realizadas para desenvolver controladores PD e PI conforme a necessidade do projeto do controlador. A Figura 6 mostra o diagrama de blocos de um sistema com a ação do controlador PID.

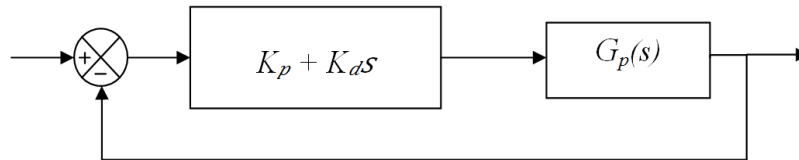
**Figura 6: Controle PID de uma Planta.**



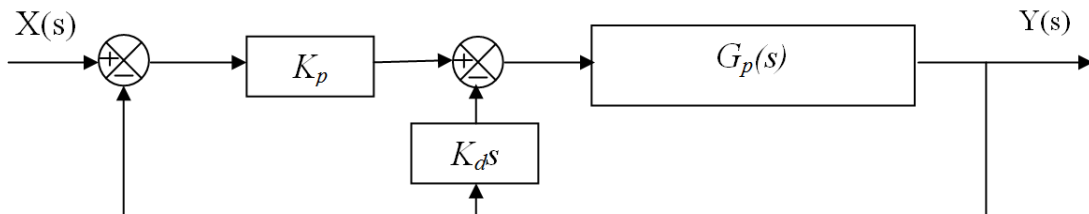
Há ainda variações aprimoradas desses controladores. O controlador PD com

realimentação de velocidade, por exemplo, evita introduzir um zero no sistema que pode tornar a resposta mais oscilatória se comparada à resposta do controlador PD tradicional (PRADO; PAZ, 2008). As Figuras 7 e 8 mostram os diagramas de bloco desses controladores.

**Figura 7: controlador PD do sistema  $G_p$ .**



**Figura 8: controlador PD com realimentação de velocidade do sistema  $G_p$ .**



A função de transferência de malha fechada de um sistema  $G_p$  com o controlador PD (que introduz um zero ao sistema) pode ser vista na Equação (7) e a função de transferência de malha fechada do sistema  $G_p$  com o controlador PD com realimentação de velocidade (que não introduz um zero ao sistema) pode ser vista na Equação (8).

$$G_{MF} = \frac{G_p(K_p + K_d s)}{1 + G_p(K_p + K_d s)} \quad (7)$$

$$G_{MF} = \frac{G_p K_p}{1 + G_p(K_p + K_d s)} \quad (8)$$

### 2.3 TEORIA DE CONTROLE ROBUSTO

Um sistema de controle é considerado robusto quando continua a apresentar o resultado esperado mesmo em meio a perturbações externas ou alterações nos parâmetros do sistema. Outros fatores importantes de um sistema de controle robusto é a manutenção da baixa sensibilidade e da estabilidade. Quando há a necessidade de projetar controladores com alta precisão deve-se aplicar os conceitos de controle robusto (DORF; BISHOP, 2009).



Essa necessidade pela robustez no projeto de sistemas de controle surgiu devido algumas situações que se mostraram desafiadoras para as técnicas de controle tradicionais. Uma dessas situações estava relacionada a processos de elevada complexidade onde era difícil uma modelagem mais precisa. Em outras situações tinha-se processos com modelos matemáticos variáveis devido o desgaste dos componentes ao longo do tempo. Para estes casos, os controladores robustos permitem manter a saída desejada mesmo com as incertezas dos modelos (AGUIRRE, 2007).

Em muitos sistemas alguns parâmetros são incertos, porém estão contidos em uma determinada faixa de valores. É então necessário analisar a estabilidade do sistema para as possíveis combinações de parâmetros que são variáveis. Para isso, usa-se procedimentos para analisar um número reduzido de combinações que representam os piores casos e, dessa forma, obter uma estimativa do pior desempenho do sistema (DORF; BISHOP, 2009).

Para projetar um sistema de controle robusto é necessário determinar a estrutura do controlador e ajustar suas características para obter um desempenho aceitável em meio às variações nos parâmetros. Alguns projetos baseiam-se em determinado critério de desempenho para escolher a estrutura do controlador, tais como o controle  $H_2$  e  $H_\infty$  (DORF; BISHOP, 2009).

Em outros casos, o projeto toma como base a variação dos parâmetros para decidir a estrutura do controlador. Um controlador robusto também pode ser projetado com base nas variações dos parâmetros do sistema, utilizando para isso, intervalos clássicos (ACIOLY, 1991) e modais (GARDENES *et al.*, 2001; GROUP, 1998). A substituição de valores pontuais dos parâmetros do sistema por intervalos permite tornar os parâmetros do sistema variáveis e com isso, usando a aritmética intervalar clássica e modal, é possível realizar o projeto do controlador robusto.

## 2.4 SISTEMAS DE CONTROLE NO ESPAÇO DE ESTADOS

O estado de um sistema é o menor conjunto de variáveis de estado, tais que o conhecimento dessas variáveis em  $t = t_0$ , junto com o conhecimento da entrada para  $t \geq t_0$ , determina o comportamento do sistema para qualquer instante  $t \geq t_0$  (OGATA, 2010). Enquanto que as variáveis de estado de um sistema dinâmico são aquelas que juntas representam o estado do sistema (OGATA, 2010). Se forem necessárias  $n$  variáveis de estados para descrever o comportamento completo de um sistema, então essas  $n$  variáveis serão as componentes de um vetor  $\mathbf{x}$  chamado vetor de estados

(OGATA, 2010).

A análise de sistemas de controle no espaço de estados é baseada na descrição de um sistema de equações em termos de  $n$  equações diferenciais de primeira ordem. Podendo ainda serem combinadas na forma vetorial-matricial para simplificar a representação (OGATA, 2010). Através da representação de sistemas no espaço de estados é possível projetar controladores, também no espaço de estados, visando obter sistemas de controle otimizados (DORF; BISHOP, 2009).

#### 2.4.1 Representação em Espaço de Estados

A resposta de um sistema representado no espaço de estado é descrita como um sistema de equações diferenciais de primeira ordem em função das variáveis de estado  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  e das entradas  $(u_1, u_2, \dots, u_m)$  (DORF; BISHOP, 2009). A equação de estados para um sistema linear e invariante no tempo pode ser representada pela Equação (9) (OGATA, 2010). Em que  $A$  é uma matriz quadrada  $n \times n$  chamada de matriz de estado,  $B$  é uma matriz  $n \times m$  chamada de matriz de entrada e  $\mathbf{x}$  é uma matriz-coluna  $n \times 1$  chamada de vetor de estado. Considerando  $\dot{x} = dx/dt$  é possível ainda escrever a equação de estados na forma matricial como é vista na Equação (10) (DORF; BISHOP, 2009).

$$\dot{x} = Ax(t) + Bu(t) \quad (9)$$

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix} \quad (10)$$

A equação de saída do sistema é representada por um conjunto de sinais  $y(t)$  expressos na forma vetor-coluna e pode ser vista na sua forma compacta na Equação (11) (DORF; BISHOP, 2009). Sendo  $C$  a matriz de saída e  $D$  a matriz de transmissão direta.

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) \quad (11)$$

A representação completa em espaço de estados de um sistema consiste na sua equação diferencial de estado e na equação de saída (DORF; BISHOP, 2009).

### 2.4.2 Controlabilidade e Observabilidade

No projeto de controladores por variáveis de estado é fundamental verificar se o sistema é totalmente controlável ou não. Quando o sistema é totalmente controlável é possível, a partir de qualquer estado inicial  $x(t_0)$ , chegar em qualquer estado desejado  $x(t)$  em um tempo finito por meio de um sinal de controle  $u(t)$  sem restrições (DORF; BISHOP, 2009).

Quando o estado  $x(t_0)$  é determinado pela observação de  $y(t)$  durante um intervalo de tempo finito, o sistema será considerado completamente observável (OGATA, 2010). Nestes casos, será possível estimar variáveis de estado não mensuráveis para construir os sinais de controle quando estas variáveis não são acessíveis por medição direta (OGATA, 2010).

Estes conceitos de controlabilidade e observabilidade foram introduzidos por Kalman, sendo de fundamental importância no projeto de sistemas de controle no espaço de estados. Através destes conceitos pode-se verificar a existência ou não de uma solução completa para um determinado problema de controle (OGATA, 2010). Quando o sistema é controlável e observável todos os seus polos, em malha fechada, podem ser posicionados em qualquer lugar do plano complexo (DORF; BISHOP, 2009). Com isso, é possível obter os critérios de desempenho desejados no projeto de controladores no espaço de estados.

### 2.4.3 Realimentação de Estados

A realimentação de estados consiste em realimentar todos os estados  $x(t)$  para gerar um sinal de entrada  $u(t)$  que produza o sinal de saída desejado  $y(t)$ . Enquanto a abordagem convencional de projeto de controladores especifica apenas os polos dominantes em malha fechada, a abordagem por realimentação de estados especifica todos os polos de malha fechada. Porém, existe um custo associado a essa abordagem, pois exige que todas as variáveis de estado possam ser medidas com sucesso ou requer a inclusão de um observador de estados no sistema (OGATA, 2010).

Considerando que todos os estados estão disponíveis para realimentação, a entrada  $u(t)$  do sistema é dada pela Equação (12) (DORF; BISHOP, 2009).

$$u = -Kx \quad (12)$$

O objetivo do projeto por realimentação de estado completo é determinar a

matriz de ganho  $K$ . É possível separar o projeto do controlador por variáveis de estados em duas partes, o projeto de realimentação de estado completo e o projeto do observador (DORF; BISHOP, 2009).

Sendo um sistema definido em variáveis de estado pela Equação (13) e a realimentação de controle dada pela Equação (12), substituindo a entrada  $u(t)$  tem-se o sistema em malha fechada da Equação (14) (DORF; BISHOP, 2009).

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (13)$$

$$\dot{x} = Ax + Bu = Ax - BKx = (A - BK)x \quad (14)$$

Esse sistema de malha fechada pode ser associado com a equação característica vista na Equação (15) (DORF; BISHOP, 2009).

$$\det(\lambda I - (A - BK)) = 0 \quad (15)$$

Então, o sistema será estável se todas as raízes da equação característica estiverem no semiplano esquerdo do plano complexo (DORF; BISHOP, 2009). Ou seja:

$$x(t) = e^{(A-BK)t}x(t_0) \rightarrow 0 \text{ à medida que } t \rightarrow \infty$$

Assim, dado o par  $(A, B)$  é possível determinar  $K$  de forma a alocar todos os polos em malha fechada no semiplano esquerdo do plano complexo quando o sistema for completamente controlável. Ao se utilizar esta realimentação de variáveis de estado deve-se posicionar as raízes da equação característica onde o desempenho transitório atenda os requisitos desejados do projeto (DORF; BISHOP, 2009).

Para sistemas de entrada e saída únicas a matriz de ganho  $K$  pode ser encontrada utilizando-se a fórmula de Ackermann vista na Equação (16) (DORF; BISHOP, 2009).

$$K = [0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 1]P_c^{-1}q(A) \quad (16)$$

onde  $q(A)$ , que pode ser vista na Equação (17), é a equação característica desejada (DORF; BISHOP, 2009),

$$q(A) = A^n + \alpha_{n-1}A^{n-1} + \dots + \alpha_0 \quad (17)$$

e  $P_c$  é a matriz de controlabilidade descrita em função de  $A$  e  $B$ , como representada na

Equação (18) (DORF; BISHOP, 2009).

$$P_c = [B \ AB \ A^2B \ \dots \ A^{n-1}B] \quad (18)$$

## 2.5 CONTROLE ÓTIMO

Com a disponibilidade dos computadores digitais e a crescente necessidade de projetar sistemas com grande desempenho, as técnicas de controle ótimo receberam atenção especial nas últimas décadas. O conceito de sistemas de controle ótimo envolve determinação de um índice de desempenho que deve ser satisfeito pelo projeto do controlador (OGATA, 2010).

Na maioria dos casos, a otimização de um sistema é realizada escolhendo-se um vetor de controle de forma a minimizar (ou maximizar) o índice de desempenho (OGATA, 2010).

### 2.5.1 Regulador Quadrático Linear

O Regulador Quadrático Linear (LQR) é uma técnica de controle ótimo em que o problema de formulação consiste em determinar uma lei de controle que minimize um índice de desempenho. Uma das vantagens do controlador quadrático ótimo é fornecer um modo sistemático para o cálculo da matriz de ganho de controle por realimentação de estados (OGATA, 2010). O regulador quadrático ótimo para o sistema  $\dot{x} = Ax + Bu$ , descrito na Equação (13), possibilita determinar a matriz  $K$  do vetor de controle ótimo,  $u(t) = -Kx(t)$ , que minimiza o índice de desempenho dado pela Equação (19).

$$J = \int_0^{\infty} (x^T Q x + u^T R u) dt \quad (19)$$

onde  $Q$  e  $R$  são matrizes hermitianas definidas positivas ou reais simétricas (OGATA, 2010).

Qualquer valor atribuído às matrizes hermitianas  $Q$  e  $R$  fornecerão um sistema sempre estável (SELOW; VEIGA, 2005). Porém, as especificações do projeto, como tempo de acomodação e sobre-elevação máxima, são alteradas de acordo com os valores das matrizes  $Q$  e  $R$  (XUE; CHEN; ATHERTON, 2007). Então, é necessário escolher valores de  $Q$  e  $R$  que se aproximem melhor das especificações desejadas para o sistema (SELOW; VEIGA, 2005).

Há estudos que utilizam de determinadas técnicas para melhor obter os valores

das matrizes hermitianas  $Q$  e  $R$ . Em alguns casos são utilizados, por exemplo, conceitos de algoritmos genéticos para a determinação dessas matrizes hermitianas (FERREIRA, 2004). É possível também utilizar a Teoria de Jogos para isso (WOLFF; NETO; LIMA, 2011). Enfim, muitas são as abordagens que podem ser utilizadas para a construção de algoritmos computacionais que busquem pelos valores das matrizes  $Q$  e  $R$  de forma a atender a determinados requisitos de desempenho do sistema a ser controlado.

A lei de controle linear dada pela Equação (20) é a lei de controle ótimo. Assim, determinando os elementos da matriz  $K$  de forma a minimizar o índice de desempenho, o sinal de controle  $u(t)$  será ótimo para qualquer estado inicial  $x(0)$  (OGATA, 2010).

$$u(t) = -Kx(t) = -R^{-1}B^T Px(t) \quad (20)$$

onde  $P$  é uma matriz hermitiana definida positiva ou simétrica real e deve satisfazer a Equação (21) definida como a equação matricial reduzida de Riccati (OGATA, 2010).

$$A^T P + PA - PBR^{-1}B^T P + Q = 0 \quad (21)$$

Com isso, as etapas do projeto do regulador quadrático ótimo consiste em resolver a equação matricial reduzida de Riccati, para a matriz  $P$ . Sendo que se existir uma matriz definida positiva  $P$  o sistema será estável ou a matriz  $A - BK$  será estável. Em seguida, através da matriz  $P$ , encontra-se a matriz  $K$  ótima (OGATA, 2010). Os polos de malha fechada de um sistema com controle LQR podem ser encontrados por meio da Equação (22).

$$|sI - A + BK| = 0 \quad (22)$$

O problema do regulador quadrático linear, juntamente com a equação de Riccati, pode ser resolvido através do MATLAB por meio do seguinte comando:

$$lqr(A, B, Q, R)$$

Este comando calcula a matriz de ganho  $K$  ótima de realimentação do sistema e com isso é possível desenvolver o projeto do controlador ótimo (OGATA, 2010).

O regulador ótimo busca encontrar um vetor de controle  $u(t)$  que mude o estado inicial  $x(t_0)$  para uma região desejada do espaço de estados de forma que o índice de desempenho seja minimizado. Para a existência de um vetor de controle ótimo

$u(t)$  é essencial que o sistema a controlar seja de estado completamente controlável (OGATA, 2010).

A definição de controle ótimo está relacionada ao fato do sistema atender a determinado índice de desempenho. É possível que o controle LQR apresente resultados que não sejam caracterizados como desempenho ótimo, porém o mais importante é que o projeto baseado no índice quadrático de desempenho resulte em um sistema de controle estável (OGATA, 2010).

## 2.6 ANÁLISE INTERVALAR

### 2.6.1 Análise Intervalar Clássica

A teoria matemática de análise de intervalos busca melhorar a exatidão e eficiência que há na prática da computação científica (ACIOLY, 1991). Métodos convencionais trabalham em cima de uma estimativa para uma resposta junto a um erro associado, porém uma análise precisa do erro é custosa e nem sempre viável (ACIOLY, 1991).

Técnicas intervalares lidam com intervalos com a garantia de que as respostas pertençam a estes intervalos promovendo maior segurança na precisão dos resultados. Uma resposta intervalar tem a garantia de sua incerteza, diferente de outros métodos que resultam apenas em uma estimativa do erro (ACIOLY, 1991).

O conjunto dos números intervalares é definido como:

$$I(\mathbb{R}) := [a, b] \mid a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}, a \leq b$$

Ou seja, um número intervalar  $[x]'$  é composto por um par ordenado de números reais  $[x_1, x_2]$  que delimita o intervalo de  $[x]'$ , onde  $x_1 \leq x_2$ , sendo que  $x_1$  e  $x_2$  são os extremos do intervalo  $[x]'$ , (GARDENES *et al.*, 2001; GROUP, 1998; PRADO, 2006). O apóstrofo designa intervalo clássico.

A análise intervalar clássica apresenta sobre-estimação nos resultados de cálculos intervalares que podem ser resolvidos usando intervalos modais (GROUP, 1998; GARDENES *et al.*, 2001; PRADO, 2006).

### 2.6.2 Análise Intervalar Modal

Um intervalo modal consiste em um par formado por um intervalo clássico e um quantificador, e sua representação pode ser vista a seguir.

$$[x] = ([x]', Q[x])$$

O quantificador  $Q[x]$  indica a modalidade de um intervalo que pode ser existencial ( $E$ ), quando existe um  $x \in [x]'$ , ou universal ( $U$ ), para todo  $x \in [x]'$ . Quando, em um intervalo  $[x] = [x_1, x_2]$ ,  $x_1 \leq x_2$  o intervalo pode ser chamado de próprio ou existencial, caso contrário ele é chamado de intervalo impróprio ou universal (GARDENES *et al.*, 2001; GROUP, 1998).

Há ainda os predicados que são condições que podem ser associadas a um intervalo. Portanto, na análise intervalar modal um intervalo é identificado pelos elementos do seu intervalo clássico que satisfazem a condição imposta pelo predicado associado (PRADO, 2006). Um exemplo da notação utilizada para relacionar quantificadores a predicados é:

$$E(x, [a]')P(x)$$

Essa notação afirma que existe um  $x \in [a]'$  tal que o predicado  $P(x)$  é satisfeito. O conjunto dos intervalos modais pode então ser representado por:

$$I^*(\mathbb{R}) = ([x]', E, U) \mid [x]' \in I(\mathbb{R})$$

Algumas operações aritméticas intervalares podem ser vistas a seguir. Considerando os intervalos  $A = [a_1, a_2]$  e  $B = [b_1, b_2]$ , onde  $a_1$  e  $a_2$  são os extremos do intervalo  $A$  e  $b_1$  e  $b_2$  são os extremos do intervalo  $B$ , tem-se que:

$$\begin{aligned} A + B &= [a_1 + b_1, a_2 + b_2] \\ A - B &= [a_1 - b_2, a_2 - b_1] \\ A \times B &= [a_1 b_1, a_2 b_2] \text{ para } a_1, a_2, b_1, b_2 \geq 0 \\ A/B &= [a_1/b_2, a_2/b_1] \text{ para } a_1, a_2 \geq 0 \text{ e } b_1, b_2 > 0 \\ dual(A) &= [a_2, a_1] \end{aligned}$$

Existem diversas operações e propriedades que são aplicadas a intervalos modais. Os detalhes das propriedades e operações aritméticas intervalares, como soma, diferença e produto envolvendo intervalos negativos podem ser encontrados em (GARDENES *et al.*, 2001; GROUP, 1998). Para os casos onde são utilizados vetores e matrizes as definições são equivalentes.

Considerando  $f$  uma função contínua de  $\mathbb{R}^n$  para  $\mathbb{R}$ , chama-se de extensão intervalar modal de  $f$ , sobre o intervalo  $[a]$ , qualquer função  $F$  de  $I^*(\mathbb{R}^n)$  para o  $I^*(\mathbb{R})$  que satisfaz a seguinte propriedade (PRADO, 2006):

$$U([x]', I(\mathbb{R}^n))((x \in [x]') \in P^*([a])) \Rightarrow (f(x) \in f([x]')) \in P^*(F([a]))$$



Considerando a função  $f$  contínua de  $\mathbb{R}^n$  em  $\mathbb{R}$ ,  $[a] \in I^*(\mathbb{R}^n)$ , e  $(a_p, a_i)$  componentes de separação de  $[a] = ([a_p], [a_i])$ , com  $[a_p]$  um subvetor contendo as componentes próprias de  $[a]$  e  $[a_i]$  um subvetor contendo as componentes impróprias de  $[a]$ . Definem-se as extensões intervalares semânticas modais  $f^*$  e  $f^{**}$  pelas expressões abaixo (PRADO, 2006).

$$f^*([a]) = [ \min_{a_p \in [a_p]'} (\max_{a_i \in [a_i]'} (f(a_p, a_i))), \max_{a_p \in [a_p]'} (\min_{a_i \in [a_i]'} (f(a_p, a_i))) ]$$

e

$$f^{**}([a]) = [ \max_{a_i \in [a_i]'} (\min_{a_p \in [a_p]'} (f(a_p, a_i))), \min_{a_i \in [a_i]'} (\max_{a_p \in [a_p]'} (f(a_p, a_i))) ]$$

Pode-se chamar de unimodal uma função  $f$ , em um intervalo  $[x]$ , se ela for totalmente monótona em todo o seu intervalo, ou seja, se  $f$  for totalmente crescente ou decrescente em  $[x]$ . Quando a função é unimodal para o intervalo  $[a]$ , as extensões são iguais. Além disso, caso  $[a]$  seja um intervalo próprio,  $f^*$  é a imagem de  $f$  no domínio  $[a]'$ . Porém, nem sempre  $f^*$  e  $f^{**}$  podem ser calculadas diretamente (PRADO, 2006).

Os predicados dos resultados de cálculos intervalares podem ser atribuídos utilizando as extensões semânticas. Para isso, são necessários dois teoremas-chave, nomeados de teoremas semânticos. Eles fornecem um significado completo dos cálculos intervalares (PRADO, 2006). Considere  $F : I^*(\mathbb{R}^n) \rightarrow I^*(\mathbb{R})$ .

**Teorema 1** - Teorema Semântico para  $f^*$  (GROUP, 1998). Se  $[a] \in I^*(\mathbb{R}^n)$ ,  $f$  é contínua em  $[a]'$  e  $F([a]) \in I^*(\mathbb{R})$ , então  $f^*([a]) \subseteq F([a])$  se e somente se:

$$U(a_p, [a_p]')Q(z, F([a]))E(a_i, [a_i]')(z = f(a_p, a_i)).$$

**Teorema 2** - Teorema Semântico para  $f^{**}$  (GROUP, 1998). Se  $[a] \in I^*(\mathbb{R}^n)$ ,  $f$  é contínua em  $[a]'$  e  $F([a]) \in I^*(\mathbb{R})$ , então  $f^{**}([a]) \supseteq F([a])$  se e somente se:

$$U(a_i, [a_i]')Q(z, \text{Dual}(F([a])))E(a_p, [a_p]')(z = f(a_p, a_i)).$$

Exemplificando, para a função real  $f(x; y) = x + y$ , temos

$$[1, 3] + [4, 8] = [5, 11],$$

que significa, em termos do Teorema 1

$$U(x, [1, 3]')U(y, [4, 8]')E(z, [5, 11]')z = x + y,$$

e, pelo Teorema 2,

$$U(z, [5, 11]')E(x, [1, 3]')E(y, [4, 8]')z = x + y.$$

Se quisermos a semântica

$$U(x, [1, 3]')U(z, \textit{intervaloz})E(y, [4, 8]')z = x + y,$$

esta deve ser

$$[1, 3] + [8, 4] = [9, 7],$$

$$\textit{Intervaloz} = [7, 9]'$$

que significa

$$U(x, [1, 3]')U(z, [7, 9]')E(y, [4, 8]')z = x + y.$$

Podemos conseguir outras semânticas manuseando as modalidades dos operandos:

$$[3, 1] + [4, 8] = [7, 9],$$

que significa

$$U(y, [4, 8]')E(x, [1, 3]')E(z, [7, 9]')z = x + y,$$

ou

$$[3, 1] + [8, 4] = [11, 5],$$

que significa

$$U(z, [5, 11]')E(x, [1, 3]')E(y, [4, 8]')z = x + y.$$

Para uma função  $f$ , contínua e racional no domínio  $[x]'$ . A extensão definida pela sequência de operações indicada pela sintaxe de  $f$  é chamada de extensão racional modal,  $fR([x])$  (PRADO, 2006). Se em  $fR([x])$  todos os argumentos forem uni-incidentes, ou seja, aparecerem apenas uma vez na equação, então:

$$f^*([x]) \subseteq fR([x]) \subseteq f^{**}([x])$$

Em particular, se todos os componentes além de serem uni-incidentes a função também for unimodal,

$$f^*([x]) = fR([x]) = f^{**}([x])$$

Neste caso, dizemos que  $fR([x])$  é ótima para o intervalo  $[x]$ .

**Teorema 3** (GROUP, 1998). Seja  $[x]$  um vetor intervalar,  $fR$  definida no domínio de  $[x]'$  e totalmente monótona para todos os seus componentes multi-incidentes, ou seja, todos os componentes que aparecem mais de uma vez. Seja  $[xd]$  o vetor estendido de  $[x]$ , tal que cada incidência de todo componente multi-incidente seja incluído em  $[xd]$  como um componente independente, mas transformado em seu dual se o correspondente ponto incidente tiver monotonicidade no sentido contrário ao seu global do correspondente componente de  $[x]$ . Então,

$$f^*([x]) = fR([xd]) = f^{**}([x])$$

A monotonicidade das incidências dos componentes pode ser investigada utilizando derivadas parciais.

Para demonstrar melhor a aplicação da análise intervalar modal será apresentado um exemplo. Dado dois cabos  $A$  e  $B$  de comprimentos pertencentes aos intervalos  $[A]' = [9, 20]$  e  $[B]' = [10, 25]$  e considerando a conexão dos cabos da seguinte forma:

$$[9, 20] + [25, 10] = [34, 30]$$

Essa expressão pode ser interpretada na análise intervalar modal como:

$$U(A, [9, 20])U(C, [30, 34])E(B, [10, 25])C = A + B$$

Isso significa que para todo valor de  $A$ , dentro do seu intervalo, e para todo valor de  $C$ , dentro de seu intervalo, existe um valor de  $B$ , dentro de seu intervalo, que satisfaz o predicado  $C = A + B$ . Isso pode ser relacionado como a necessidade de selecionar um comprimento particular do cabo  $B$  que unido a qualquer comprimento do cabo  $A$ , dentro do seu intervalo, seja possível fazer com que o comprimento total do cabo  $C$  mantenha-se dentro do intervalo especificado  $[C] = [34, 30]$ .

Pode-se perceber que o intervalo  $[B]$  é um intervalo existencial já que existe apenas um valor dentro de seu intervalo que satisfaz o predicado  $C = A + B$ . Os demais intervalos são universais podendo assumir qualquer valor dentro de seus intervalos para que o predicado  $C = A + B$  seja satisfeito. Isso pode mudar de acordo com a aplicação e o objetivo desejado no uso dos intervalos modais.

No projeto de um sistema de controle, através da análise intervalar modal, é possível manter a saída do sistema dentro de um intervalo esperado para qualquer variação nos parâmetros do sistema, desde que pertencente a um intervalo conhecido,

atribuindo certo valor de controle dentro de um intervalo de valores. Ou seja, na equação  $C = A + B$ , para manter o valor de  $C$  dentro de um intervalo específico, conforme  $A$  varie dentro de um intervalo conhecido, é possível determinar um valor para  $B$ , dentro do intervalo de valores, que satisfaça a equação.

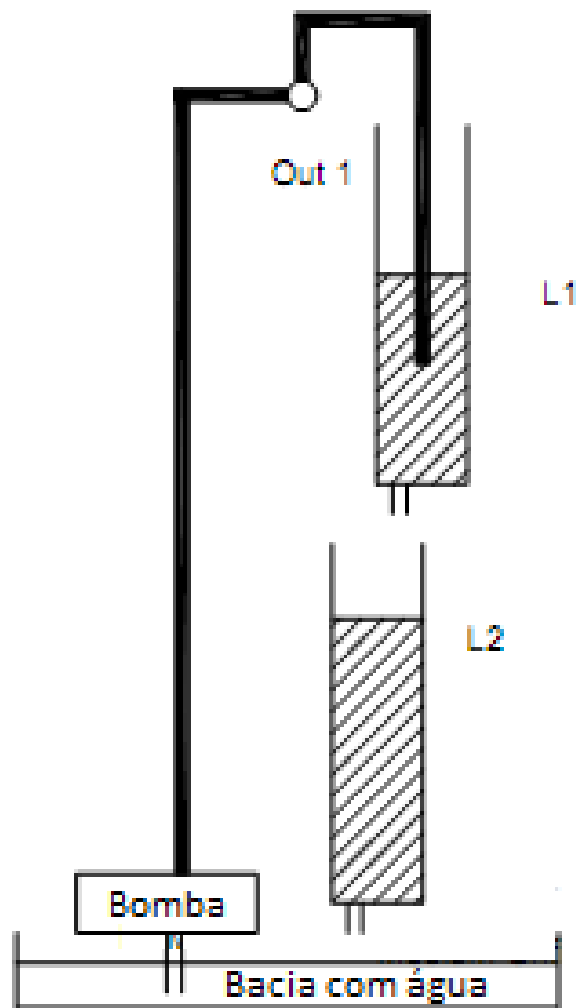
## 2.7 SISTEMA DE DOIS TANQUES

O Sistema de Dois Tanques da *Quanser* é um protótipo de simulação de processos, usa dois tanques interligados em cascata. O fluxo contínuo é regulado por uma bomba e não tem válvulas de controle. A água é bombeada para um ou para os dois tanques, conforme a configuração feita, por meio de tubos com dimensão específica. Os dois tanques deste sistema são montados de forma que o fluxo de saída do primeiro tanque flui para dentro do segundo tanque, e o fluxo de saída do segundo tanque flui para dentro do reservatório (QUANSER, 2004).

Os fluxos de saída dos tanques são regulados através da inserção de parafusos com diâmetros distintos. Dutos de borracha com acoplamentos apropriados são fornecidos tais que se possa bombear para dentro de um ou ambos os tanques. A seleção das saídas da bomba controla a razão de fluxo entre as duas saídas (QUANSER, 2004).

A configuração do Sistema de Dois Tanques adotada para este trabalho resulta na alimentação do primeiro tanque por meio da bomba e o segundo tanque alimentado somente pelo fluxo de saída do primeiro tanque (QUANSER, 2004). A Figura 9 mostra essa configuração. A variável a ser controlada é o nível de água do segundo tanque.

Figura 9: Configuração do Sistema de Dois Tanques para o projeto dos controladores.



Fonte: Adaptada de (QUANSER, 2004)

### 3 METODOLOGIA

Primeiramente foi realizada a modelagem do Sistema de Dois Tanques da Quanser de forma a obter as informações necessárias para o projeto dos controladores robustos. Em seguida, foram iniciados os projetos dos controladores robustos usando conceitos de análise intervalar modal e, por fim, controle ótimo.

Para o projeto dos controladores usando análise intervalar modal, foi considerado que a planta contém incertezas em seus parâmetros de forma que foi desenvolvido controladores robustos que levem em consideração essa variação nos parâmetros da planta.

Para o projeto do controlador usando os conceitos de controle ótimo, foi usada a técnica LQR para obter determinadas especificações de desempenho desejadas para o funcionamento do Sistema de Dois Tanques. Através dessa técnica foi obtida a matriz de ganho de realimentação do sistema no espaço de estados necessária para o desenvolvimento do controlador.

#### 3.1 MODELAGEM DO SISTEMA DE DOIS TANQUES

O Sistema de Dois Tanques da Quanser fornece informações suficientes a respeito da planta para que possa ser modelada conforme a configuração adotada. A velocidade dos fluídos que escoam pelos orifícios de cada tanque pode ser descrita pela equação de Bernoulli para pequenos orifícios, vista na Equação (23).

$$v_o = \sqrt{2gL_1} \quad (23)$$

onde  $g$  é a aceleração da gravidade em  $cm/s^2$  e  $L_1$  o nível da água no tanque em  $cm$ . Multiplicando essa equação pela área do orifício encontra-se a vazão de saída dos tanques em  $cm^3/s$ .

Para a configuração adotada neste projeto, a vazão de entrada no primeiro tanque é dada por  $F_{in} = k_m V_p$ . Onde  $k_m$  é uma constante da bomba e  $V_p$  é a tensão aplicada a bomba. A partir dessas informações básicas o sistema foi modelado buscando as equações que descrevem as variações nos níveis dos dois tanques.

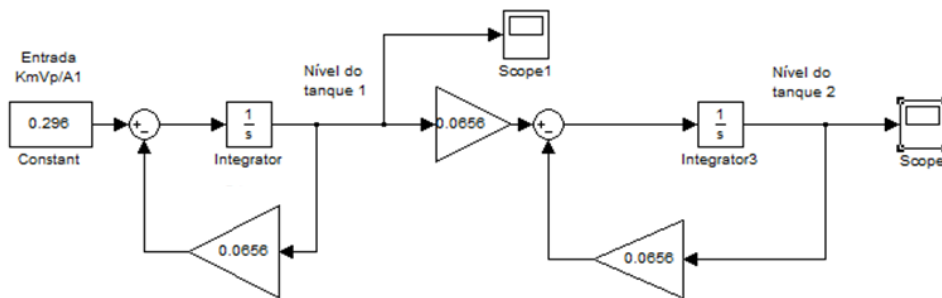
Pelo fato das equações que regem o sistema não serem lineares é necessário linearizá-las sobre um ponto de operação  $L_{10}$ , para o primeiro tanque, e  $L_{20}$ , para o segundo tanque, usando a série Taylor. Após a linearização do sistema, a variação nos níveis do primeiro e segundo tanque podem ser representadas pelas Equações (24) e (25) (QUANSER, 2004).

$$\dot{L}_1 = -\frac{a_1}{A_1} \sqrt{\frac{g}{2L_{10}}} L_1 + \frac{K_m}{A_1} V_p \text{ cm/s} \quad (24)$$

$$\dot{L}_2 = -\frac{a_2}{A_2} \sqrt{\frac{g}{2L_{20}}} L_2 + \frac{a_1}{A_2} \sqrt{\frac{g}{2L_{10}}} L_1 \text{ cm/s} \quad (25)$$

As variáveis  $a_1$  e  $a_2$  são os diâmetro dos orifícios do primeiro e do segundo tanque, respectivamente. As variáveis  $A_1$  e  $A_2$  são as áreas do primeiro e segundo tanque. Os valores de  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $a_1$  e  $a_2$  podem ser alterados na planta para as diversas opções disponíveis. A partir dessas equações é possível construir o diagrama de blocos do sistema para simulação no software MATLAB, através do pacote Simulink, como pode ser visualizado na Figura 10.

**Figura 10: Diagrama de bloco do Sistema de Dois Tanques feito no Simulink.**



Para realizar a modelagem do sistema em diagrama de blocos, usando o simulink, adotou-se os valores padrões especificados pela fabricante, a *Quanser*. A Tabela 2 mostra os valores de cada variável envolvida na modelagem do Sistema de Dois Tanques.

**Tabela 2: Valores utilizados na modelagem do sistema.**

Variável	Valor	Variável	Valor
$A_1$	15,5179 $cm^2$	$g$	980 $cm^2/s$
$A_2$	15,5179 $cm^2$	$V_p$	1 volt
$a_1$	0,17813919765 $cm$	$L_{10}$	15 $cm$
$a_2$	0,17813919765 $cm$	$L_{20}$	15 $cm$
$k_m$	4,6 ( $cm^3/s$ )/Volt		

Aplicando a transformada de Laplace sobre as Equações (24) e (25) e substituindo as variáveis envolvidas na modelagem pelos valores da Tabela 2 tem-se as Equações (26) e (27).

$$\mathcal{L}\{\dot{L}_1\} = \mathcal{L}\left\{-\frac{a_1}{A_1} \sqrt{\frac{g}{2L_{10}}} L_1 + \frac{K_m}{A_1} V_p\right\}$$

$$sL_1(s) = -\frac{a_1}{A_1} \sqrt{\frac{g}{2L_{10}}} L_1(s) + \frac{K_m}{A_1} V_p(s)$$

$$sL_1(s) = -0,0656L_1(s) + 0,296V_p(s) \quad (26)$$

$$\mathcal{L}\{\dot{L}_2\} = \mathcal{L}\left\{-\frac{a_2}{A_2} \sqrt{\frac{g}{2L_{20}}} L_2 + \frac{a_1}{A_2} \sqrt{\frac{g}{2L_{10}}} L_1\right\}$$

$$sL_2(s) = -\frac{a_2}{A_2} \sqrt{\frac{g}{2L_{20}}} L_2(s) + \frac{a_1}{A_2} \sqrt{\frac{g}{2L_{10}}} L_1(s)$$

$$sL_2(s) = -0,0656L_2(s) + 0,0656L_1(s) \quad (27)$$

Colocando  $L_1(s)$  em evidência na Equação (26) chega-se na Equação (28).

$$L_1(s) = \frac{0,296V_p(s)}{s + 0,0656} \quad (28)$$

Então, substituindo  $L_1(s)$  na Equação (27) e considerando  $L_2(s)$  a saída do sistema e  $V_p(s)$  a entrada, é possível encontrar a função de transferência do sistema completo como pode ser visto na Equação (29).

$$\frac{L_2(s)}{V_p(s)} = \frac{0,0194}{s^2 + 0,1312s + 0,0043} \quad (29)$$

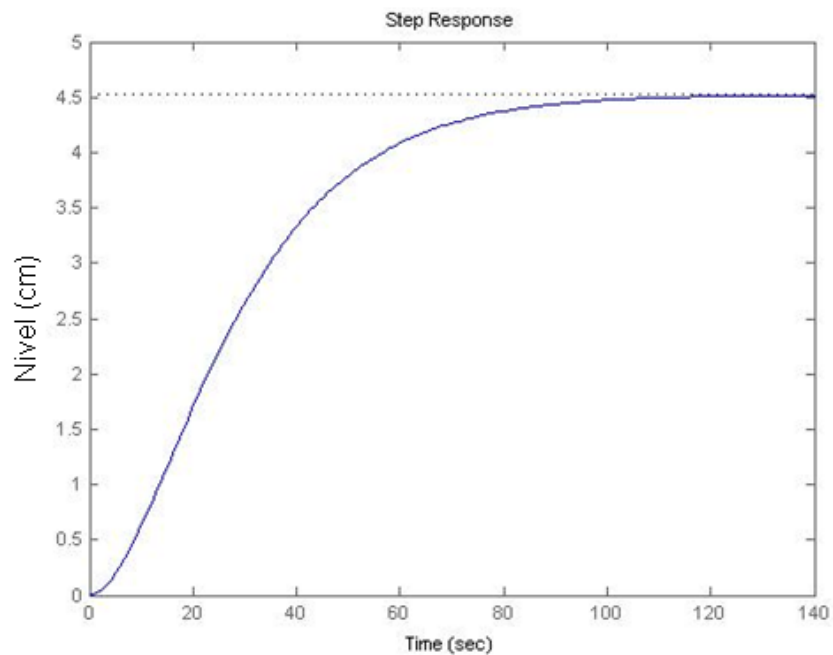
Neste projeto, a variável que se pretende controlar é o nível de água do segundo tanque, a variável  $L_2$ . A resposta da planta para o nível de água no segundo tanque, sem nenhuma ação de controle envolvida pode ser visualizada na Figura 11. Esta resposta pode ser obtida tanto na simulação do diagrama de blocos no Simulink quanto através da função de transferência do sistema usando scripts do MATLAB.

Percebe-se pela Figura 11 que a saída do Sistema de Dois Tanques da *Quanser* se acomoda após um longo período, aproximadamente 120 segundos, apresentando ainda um erro estacionário relativamente grande de 350% para a resposta ao degrau. Quando o sistema torna-se realimentado, com realimentação unitária, a resposta a mesma entrada é vista na Figura 12.

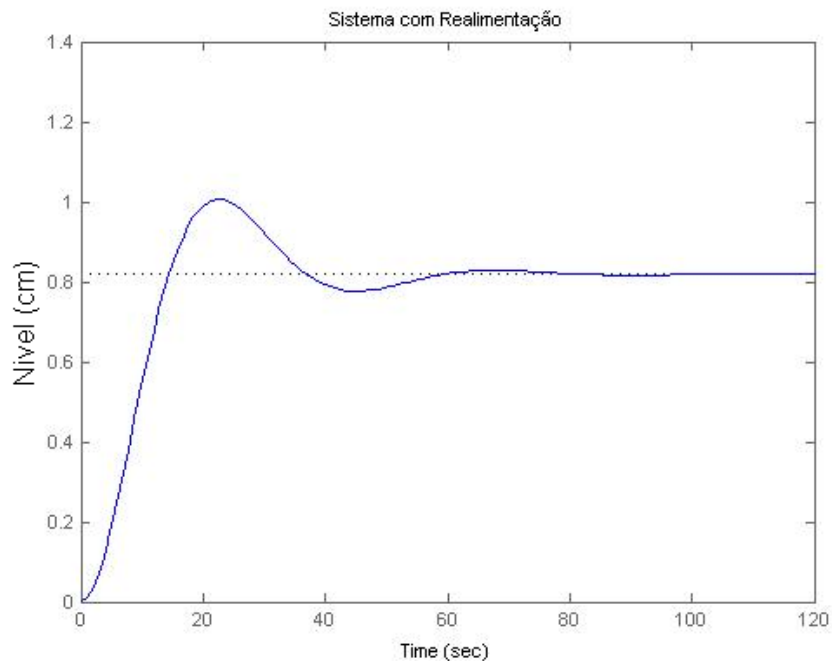
Percebe-se notoriamente a melhora do resultado, porém surgem oscilações e o tempo de acomodação continua alto. O sistema realimentado apresenta ainda um erro estacionário, porém menor que o obtido pela resposta do sistema sem realimentação.



**Figura 11: Resposta do sistema em malha aberta a uma entrada degrau padrão.**



**Figura 12: Resposta ao degrau do sistema com realimentação.**



Pelos resultados apresentados nas Figuras 11 e 12 verifica-se a necessidade de uma ação de controle sobre o sistema para melhorar seu desempenho. Com base nisso serão desenvolvidos controladores robustos e controladores ótimos.

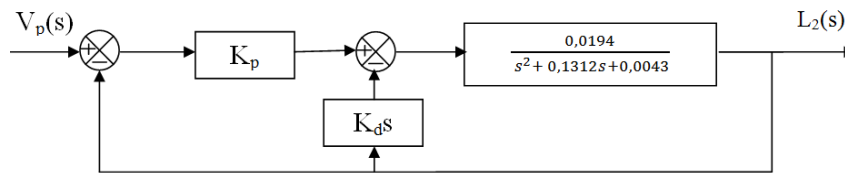
### 3.2 PROJETO DE UM CONTROLADOR ROBUSTO PD COM REALIMENTAÇÃO DE VELOCIDADE USANDO ANÁLISE INTERVALAR MODAL

O primeiro controlador projetado é um controlador de ação proporcional-derivativo com realimentação de velocidade aplicando os conceitos de análise intervalar modal. O uso de um controlador PD com realimentação de velocidade evita introduzir um zero no sistema que pode tornar a resposta mais oscilatória se comparado ao controlador PD tradicional (PRADO; PAZ, 2008). Dessa forma, a função de transferência de malha fechada do Sistema de Dois Tanques com ação do controlador PD com realimentação de velocidade é vista na Equação (30)

$$G_{PD}(s) = \frac{0,0194K_p}{s^2 + (0,1312 + 0,0194K_d)s + 0,0043 + 0,0194K_p} \quad (30)$$

onde  $K_p$  e  $K_d$  são constantes de controle proporcional e derivativo, respectivamente. A Figura 13 ilustra, em diagrama de blocos, a estrutura desse sistema.

**Figura 13: Diagrama de blocos do controlador PD com realimentação de velocidade.**



Comparando o sistema de controle PD com realimentação de velocidade com um sistema padrão de segunda ordem, Equação (2), é possível determinar os valores das constantes  $K_p$  e  $K_d$  para que o sistema tenha a saída desejada, como mostrado nas Equações (31) e (32).

$$\omega_n^2 = 0,0043 + 0,0194K_p$$

$$K_p = \frac{\omega_n^2 - 0,0043}{0,0194} \quad (31)$$

$$2\xi\omega_n = 0,1312 + 0,0194K_d$$

$$K_d = \frac{2\xi\omega_n - 0,1312}{0,0194} \quad (32)$$

Para o projeto de um controlador robusto será considerado que os parâmetros do Sistema de Dois Tanques da *Quanser* são incertos com variação de 10% em seus valores padrões para menos e para mais. Esses parâmetros são definidos na Tabela 3.

**Tabela 3: Definição dos parâmetros do sistema da Quanser em malha fechada.**

Parâmetro	Valor Padrão	Variação de 10%
P1	0,0194	[0,01746, 0,02134]
P2	0,1312	[0,11808, 0,14432]
P3	0,0043	[0,00387, 0,00473]

A interpretação semântica para os intervalos [ P1 ], [ P2 ] e [ P3 ] deve ser a que manterá uma resposta para o sistema, dentro dos critérios de desempenho desejados, para qualquer valor dentro de seus intervalos.

Outros parâmetros que são especificados no projeto do sistema também são colocados em forma de intervalos como o valor de  $[\xi] = [0,70, 0,59]$  e de  $[\omega_n] = [0,2, 0,169]$ . Estes valores foram definidos de forma a garantir que o sistema tenha uma sobre-elevação máxima ( $M_p$ ) de 10% e tempo de acomodação ( $t_s$ ) de 30 segundos conforme as Equações (3) e (4) (Ogata, 2010).

A interpretação semântica para as especificações de  $[\xi]$  e  $[\omega_n]$  deve ser de que exista pelo menos um valor, dentro do seu intervalo, para as variações nos parâmetros da planta. Ou seja:

$$U(P1, [P1]')U(P3, [P3]')Q(k_p, [K_p])E(\omega_n, [\omega_n]')(K_p = \frac{\omega_n^2 - P3}{P1})$$

e

$$U(P1, [P1]')U(P2, [P2]')Q(K_d, [K_d])E(\omega_n, [\omega_n]')E(\xi, [\xi]')(K_d = \frac{2\xi\omega_n - P2}{P1})$$

Para garantir a interpretação semântica acima pode-se utilizar o Teorema semântico (1) com [P1], [P2] e [P3] próprios e  $[\xi]$  e  $[\omega_n]$  impróprios. O resultado de  $K_p$  e  $K_d$  dirá se são universais ou existenciais. Ou seja, se forem próprios, existenciais, senão, universais. Como as Equações (31) e (32) não apresentam multi-incidências e as funções são unimodais para os intervalos, pode-se utilizar os conceitos de uni-incidência para obter a extensão intervalar para os ganhos do controlador.

Os valores dos ganhos  $K_p$  e  $K_d$  serão intervalos e podem ser determinados usando as operações aritméticas intervalares. Assim, podemos escrever as Equações (31) e (32) usando intervalos, como pode ser visto nas Equações (33) e (34).

$$[K_p] = \frac{[\omega_n]^2 - 0,0043}{0,0194} \quad (33)$$

$$[K_d] = \frac{2[\xi][\omega_n] - 0,1312}{0,0194} \quad (34)$$

Essas equações podem ser reescritas em função dos parâmetros P1, P2 e P3 conforme apresentadas nas Equações (35) e (36).

$$[K_p] = \frac{[\omega_n]^2 - [P3]}{[P1]} \quad (35)$$

$$[K_d] = \frac{2[\xi][\omega_n] - [P2]}{[P1]} \quad (36)$$

Aplicando as propriedades e operações da aritmética intervalar modal encontradas em (GARDENES *et al.*, 2001; GROUP, 1998; PRADO, 2006) às Equações (35) e (36), e considerando os intervalos todos positivos, é possível encontrar os intervalos dos ganhos  $K_p$  e  $K_d$ , como pode ser visto nas Equações (37) e (38), respectivamente.

$$[K_p] = \left[ \frac{\omega_{n1}^2 - P3_2}{P1_2}, \frac{\omega_{n2}^2 - P3_1}{P1_1} \right]$$

$$[K_p] = \left[ \frac{0,2^2 - 0,00473}{0,02134}, \frac{0,169^2 - 0,00387}{0,01746} \right]$$

$$[K_p] = [1,6528, 1,4336] \quad (37)$$

$$[K_d] = \left[ \frac{2\xi_1 \omega_{n1} - P2_2}{P1_2}, \frac{2\xi_2 \omega_{n2} - P2_1}{P1_1} \right]$$

$$[K_d] = \left[ \frac{2 \times 0,7 \times 0,2 - 0,14432}{0,02134}, \frac{2 \times 0,59 \times 0,169 - 0,11808}{0,01746} \right]$$

$$[K_d] = [6,3580, 4,7262] \quad (38)$$

As representações semânticas das equações apresentadas e suas interpretações são:

$$U(P1 \in [P1]')U(P3, [P3]')E(\omega_n, [\omega_n]')U(K_p, [K_p]') K_p = \frac{\omega_n^2 - P3}{P1}$$

Interpretação: Para todo valor de P1, para todo valor de P3, existe um valor de  $\omega_n$  para todo valor de  $K_p$ , onde todos estão dentro de seus respectivos intervalos, que satisfaz o predicado apresentado.

$$U(P1 \in [P1]')U(P2, [P2]')E(\omega_n, [\omega_n]')E(\xi, [\xi]')U(K_d, [K_d]') K_d = \frac{2\xi \omega_n - P2}{P1}$$

Interpretação: Para todo valor de P1, para todo valor de P2, existe um valor de  $\omega_n$  e de  $\xi$  para todo valor de  $K_d$ , onde todos estão dentro de seus respectivos intervalos, que satisfaz o predicado apresentado.

A resposta do sistema apresentou um erro de regime por não ter alcançado o nível desejado nos testes realizados. Isso mostra que o controlador PD com realimentação de velocidade não é o melhor controlador a ser aplicado a essa planta. Há então a necessidade de fazer o projeto de outros controladores para evitar esse erro em regime.

### 3.3 PROJETO DE UM CONTROLADOR ROBUSTO PID USANDO ANÁLISE INTERVALAR MODAL

Foi realizado o projeto de um controlador PID a fim de eliminar o erro em regime obtido pelo controlador PD com realimentação de velocidade. Esse controlador foi escolhido pelo fato da ação integrativa do PID tornar a planta um sistema de tipo 1, que tem como uma de suas características erro nulo a resposta ao degrau (OGATA, 2010). Este controlador PID foi desenvolvido usando a abordagem analítica encontrada em (OGATA, 2010).

Sendo  $G_c(s)$  a função de transferência do controlador PID, vista na Equação (6), e  $G(s)$  a função de transferência do Sistema de Dois Tanques em malha aberta, vista na Equação (29). A função de transferência de malha fechada do Sistema de Dois Tanques com ação do controlador PID,  $G_{MF}(s)$ , pode ser vista na Equação (39).

$$G_{MF} = \frac{G_c(s)G(s)}{1 + G_c(s)G(s)} \quad (39)$$

Desenvolvendo tem-se a Equação (40).

$$G_{MF}(s) = \frac{0,0194(K_d s^2 + K_p s + K_i)}{s^3 + (0,1312 + 0,0194K_d)s^2 + (0,0043 + 0,0194K_p)s + 0,0194K_i} \quad (40)$$

O sistema resultante é de terceira ordem, ou seja, terá três polos. Comparando esse sistema como um sistema de segunda ordem com acréscimo de um polo, que pode ser visto na Equação (41), é possível encontrar os valores das constantes do controlador em função de  $\xi$  e  $\omega_n$ .

$$G_d(s) = \frac{\omega_n^2}{(s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2)(s + p)} = \frac{\omega_n^2}{s^3 + (p + 2\xi\omega_n)s^2 + (2\xi\omega_n p + \omega_n^2)s + \omega_n^2 p} \quad (41)$$

Esse polo  $p$  inserido deve ser escolhido de forma que não altere a posição dos polos dominantes dos locais desejados. Com isso, as constantes do controlador PID,  $K_p$ ,  $K_i$  e  $K_d$ , podem ser encontradas comparando o denominador de  $G_{MF}(s)$  com o de  $G_d(s)$  resultando nas Equações (42), (43) e (44).

$$K_p = \frac{2p\xi\omega_n + \omega_n^2 - 0,0043}{0,0194} \quad (42)$$

$$K_i = \frac{p\omega_n^2}{0,0194} \quad (43)$$

$$K_d = \frac{p + 2\xi\omega_n - 0,1312}{0,0194} \quad (44)$$

Essas equações em função dos parâmetros P1, P2 e P3 podem ser vistas nas Equações (45), (46) e (47).

$$K_p = \frac{2p\xi\omega_n + \omega_n^2 - P3}{P1} \quad (45)$$

$$K_i = \frac{p\omega_n^2}{P1} \quad (46)$$

$$K_d = \frac{p + 2\xi\omega_n - P2}{P1} \quad (47)$$

Para requisitos do projeto foi considerado o tempo de estabelecimento de 30 segundos, com critério de 5%, igualmente como nos projetos anteriores e sobre-elevação máxima de 10%. Com isso, os valores de coeficiente de amortecimento e frequência natural não amortecida são  $[\xi] = [0,8, 0,59]$  e  $[\omega_n] = [0,2, 0,169]$ , respectivamente, conforme as Equações (3) e (4) (Ogata, 2010). As equações intervalares para determinar os valores das constantes do controlador PID, que são  $K_p$ ,  $K_i$  e  $K_d$ , são montadas nas Equações (48),(49) e (50).

$$[K_p] = \left[ \frac{2p\xi_1\omega_{n1} + \omega_{n1}^2 - P3_2}{P1_2}, \frac{2p\xi_2\omega_{n2} + \omega_{n2}^2 - P3_1}{P1_1} \right] \quad (48)$$

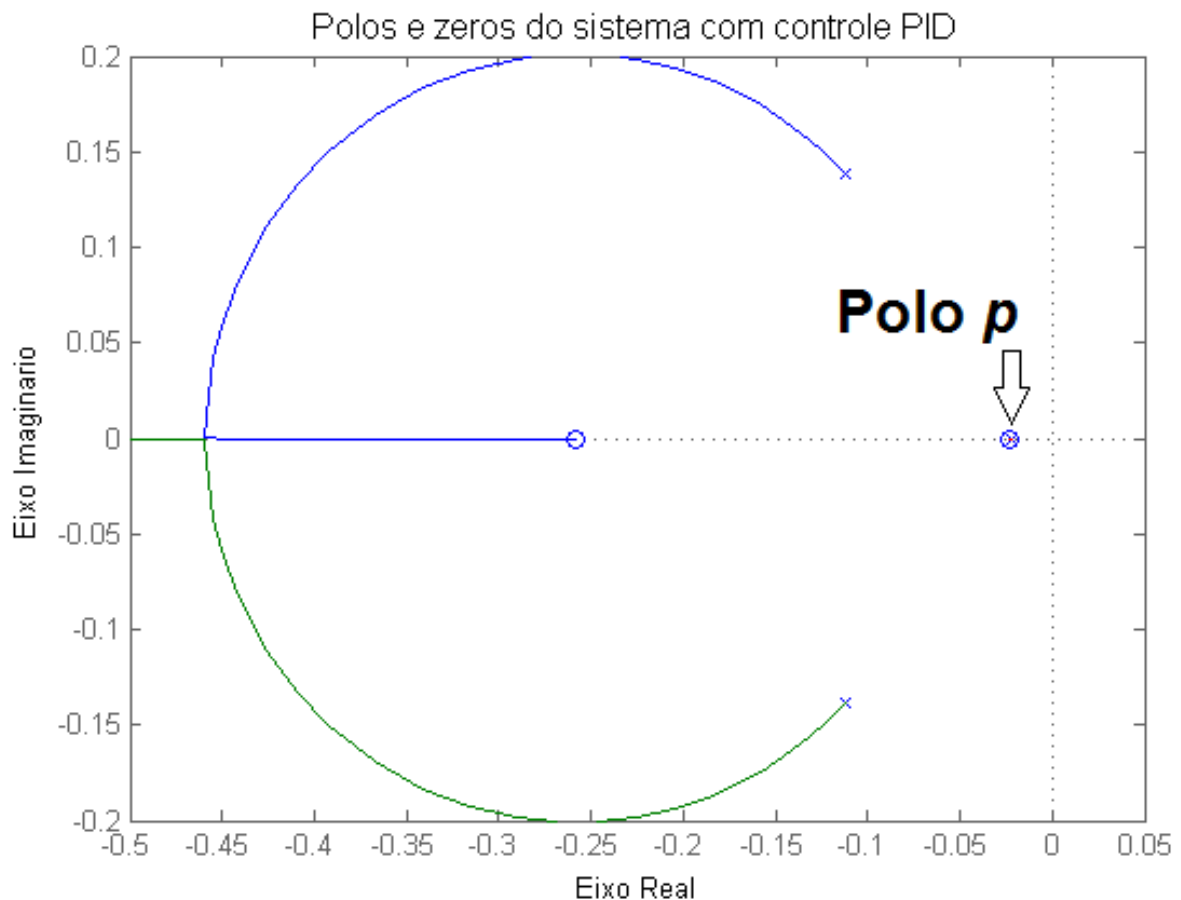
$$[K_i] = \left[ \frac{p\omega_{n1}^2}{P1_2}, \frac{p\omega_{n2}^2}{P1_1} \right] \quad (49)$$

$$[K_d] = \left[ \frac{p + 2\xi_1\omega_{n1} - P2_2}{P1_2}, \frac{p + 2\xi_2\omega_{n2} - P2_1}{P1_1} \right] \quad (50)$$

Sendo  $p$  um dos polos do sistema ao inserir o controlador PID, para esse polo

determinou-se o valor de  $-0,022$  para evitar valores altos de  $K_p$ ,  $K_i$  e  $K_d$  que tornam a implementação do controlador inviável devido às limitações físicas do sistema. Além disso, esse valor altera minimamente a posição dos polos dominantes ao se posicionar sobre um dos zeros do sistema, como pode ser visto na Figura 14. Isso evita que esse polo influencie no comportamento do sistema e permite que o controlador atue de acordo como projetado.

**Figura 14: Polo  $p$  posicionado sobre um dos zeros do sistema.**



Percebe-se que a Equação (48) apresenta multi-incidência em  $\omega_n$ . Porém, esta multi-incidência não afeta o projeto do controlador usando intervalos modais. Isso pode ser comprovado ao derivar a Equação (48) em relação a  $\omega_n$  e verificar que para quaisquer valores dentro dos intervalos das variáveis o resultado será sempre maior que zero. Então, desenvolvendo as equações acima chega-se aos valores das constantes do controlador PID como pode ser observado nas Equações (51), (52) e (53).

$$[K_p] = \left[ \frac{2 \times 0,022 \times 0,8 \times 0,2 + 0,2^2 - 0,00473}{0,02134}, \frac{2 \times 0,022 \times 0,59 \times 0,169 + 0,169^2 - 0,00387}{0,01746} \right]$$

$$[K_p] = [1,9827 \quad , \quad 1,6654] \quad (51)$$

$$[K_i] = \left[ \frac{0,022x0,2^2}{0,02134}, \quad \frac{0,022x0,169^2}{0,01746} \right]$$

$$[K_i] = [0,0412 \quad , \quad 0,0360] \quad (52)$$

$$[K_d] = \left[ \frac{0,022 + 2x0,8x0,2 - 0,14432}{0,02134}, \quad \frac{0,022 + 2x0,59x0,169 - 0,11808}{0,01746} \right]$$

$$[K_d] = [9,2634 \quad , \quad 5,9187] \quad (53)$$

As representações semânticas das equações apresentadas e suas interpretações são:

$$U(P1 \in [P1]')U(P3, [P3]')E(\omega_n, [\omega_n]')E(\xi, [\xi]')U(K_p, [K_p]') K_p = \frac{2p\xi \omega_n + \omega_n^2 - P3}{P1}$$

Interpretação: Para todo valor de P1, para todo valor de P3, existe um valor de  $\omega_n$  e de  $\xi$  para todo valor de  $K_p$ , onde todos estão dentro de seus respectivos intervalos, que satisfaz o predicado apresentado.

$$U(P1 \in [P1]')E(\omega_n, [\omega_n]')U(K_i, [K_i]') K_i = \frac{p\omega_n^2}{P1}$$

Interpretação: Para todo valor de P1, existe um valor de  $\omega_n$  para todo valor de  $K_i$ , onde todos estão dentro de seus respectivos intervalos, que satisfaz o predicado apresentado.

$$U(P1 \in [P1]')U(P2 \in [P2]')E(\omega_n, [\omega_n]')E(\xi, [\xi]')U(K_d, [K_d]') K_d = \frac{p + 2\xi \omega_n - P2}{P1}$$

Interpretação: Para todo valor de P1, para todo valor de P2, existe um valor de  $\omega_n$  e de  $\xi$  para todo valor de  $K_d$ , onde todos estão dentro de seus respectivos intervalos, que satisfaz o predicado apresentado.

Com o controlador PID desenvolvido foram feitas algumas simulações e comparações e os resultados obtidos são apresentados no capítulo de Resultados.

### 3.4 PROJETO DE UM CONTROLADOR POR ALOCAÇÃO DE POLOS

Antes de iniciar o projeto de um controlador ótimo foi realizado o projeto de um controlador por alocação de polos, permitindo um melhor entendimento dos conceitos



relacionados ao espaço de estados e a realimentação de estados. O controlador desenvolvido por alocação de polos também será usado para realizar comparações com o controlador ótimo desenvolvido.

Para o desenvolvimento deste controlador o primeiro passo realizado é modelar o sistema no espaço de estados para que seja possível aplicar todos os conceitos de controle no espaço de estados. A partir das equações de estados que modelam o sistema, vistas nas Equações (24) e (25), é possível obter as variáveis de estados,  $x_1$  e  $x_2$ , como visto nas Equações (54) e (55).

$$x_1 = L_1 \quad (54)$$

$$x_2 = L_2 \quad (55)$$

Então o sistema pode ser descrito pelas Equações (56) e (57).

$$\dot{x}_1 = \dot{L}_1 = -0,0656x_1 + 0,296V_p \quad (56)$$

$$\dot{x}_2 = \dot{L}_2 = -0,0656x_2 + 0,0656x_1 \quad (57)$$

Com isso temos a representação matricial no espaço de estados para o Sistema de Dois Tanques da *Quanser* conforme mostra a Equação (58).

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,0656 & 0 \\ 0,0656 & -0,0656 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,296 \\ 0 \end{bmatrix} V_p \quad (58)$$

E a Equação (59) mostra a equação de saída do sistema.

$$y = L_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (59)$$

Comparando a Equação (58) com a equação padrão:  $\dot{x} = Ax(t) + Bu(t)$  podemos encontrar as matrizes A e B conforme apresentadas nas Equações (60) e (61).

$$A = \begin{bmatrix} -0,0656 & 0 \\ 0,0656 & -0,0656 \end{bmatrix} \quad (60)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0,296 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (61)$$

Pelo fato do sistema ser do tipo 0 é necessário inserir um integrador ao sistema

para evitar erro de regime. Com isso as matrizes A e B são modificadas conforme mostradas nas Equações (62) e (63)

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} -0,0656 & 0 & 0 \\ 0,0656 & -0,0656 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (62)$$

$$\hat{B} = \begin{bmatrix} 0,296 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (63)$$

Com estas informações é possível calcular a matriz de realimentação  $K$  usando o método de Ackermann. Neste projeto, foi utilizada a função  $acker(A,B,POLOS)$  do MATLAB para isso. O parâmetro  $POLOS$  é utilizado para realizar a alocação de polos nos locais desejados. Então, a função retorna a matriz de realimentação  $K$  que aloca os polos nos locais especificados gerando a resposta desejada.

Como requisito do projeto foram definidos os polos que provoquem uma máxima sobre-elevação de 10% e um tempo de acomodação de 30 segundos para a resposta do sistema. Com base nesses requisitos e considerando as Equações (3) e (4) é possível obter os valores de  $\xi$  e  $\omega_n$ . Sendo  $\xi = 0,59$  e  $\omega_n = 0,17$ , substituindo esses valores na equação padrão de um sistema de segunda ordem, como vista na Equação (2), encontra-se os polos  $-0,1034 + j0,1412$  e  $-0,1034 - j0,1412$ .

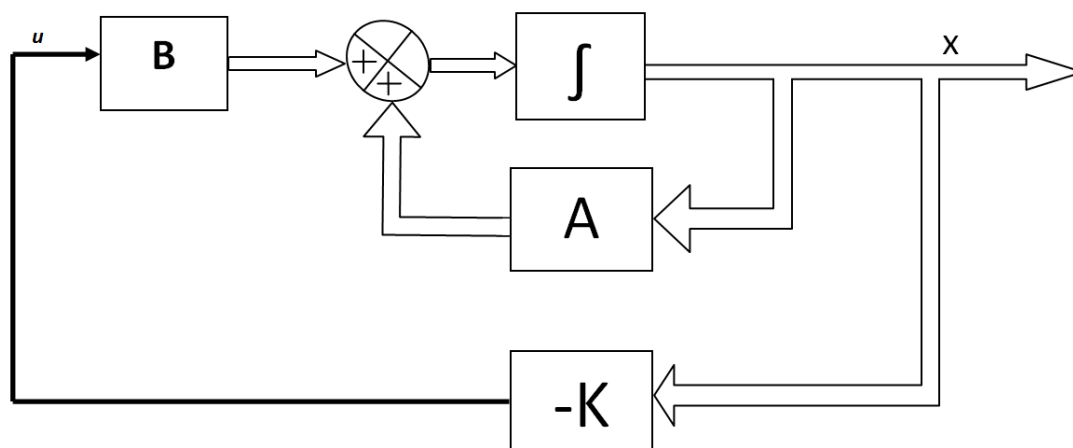
Pelo fato de ter sido adicionado um integrador ao sistema ele tornou-se um sistema de terceira ordem. Para o terceiro polo do sistema escolheu-se o valor de  $-5$  de forma a não interferir na posição dos polos dominantes mantendo, assim, a resposta desejado do sistema. Por tanto, os polos desejados para o projeto do controlador foram:  $-0,1034 + j0,1412$ ,  $-0,1034 - j0,1412$  e  $-5$ .

A matriz de realimentação  $K$  obtida para o projeto do controlador por alocação de polos pode ser vista na Equação (64).

$$K = [17,1473 \quad 37,4591] \quad (64)$$

A Figura 15 apresenta a estrutura de um controlador por alocação de polos através da realimentação de estados do sistema. Os resultados obtidos com este controlador serão apresentados juntamente com os resultados do controlador ótimo, por meio de comparações, na parte de resultados deste trabalho.

**Figura 15: Sistema de controle de malha fechada com realimentação de estados.**



### 3.5 PROJETO DE UM CONTROLADOR ÓTIMO LQR

Foi desenvolvido um controlador ótimo utilizando a técnica do Regulador Quadrático Linear ( LQR ). Assim como no projeto de alocação de polos, foi utilizada a modelagem do Sistemas de Dois Tanques no espaço de estados com a inserção do integrador para o projeto do controle LQR. Apesar do LQR não ser uma técnica de controle robusto, entender o seu funcionamento é de grande importância para a compreensão de projetos de controladores robustos no espaço de estados envolvendo técnicas mais complexas, como o LQG, o  $H_2$  e o  $H_\infty$ .

O projeto do LQR consiste em determinar a matriz de realimentação  $K$  ótima de forma a minimizar o índice de desempenho determinado para o LQR, vista anteriormente na Equação (19). Para isso, foi utilizada a função do MATLAB:  $lqr(A, B, Q, R)$  para obter a matriz de realimentação ótima. Tal função também já resolve a equação reduzida de Riccati necessária para o projeto do controle LQR.

Os valores das matrizes hermitianas  $Q$  e  $R$  foram escolhidas de forma a se aproximar das especificações de desempenho definidas nos projetos anteriores, sendo máxima sobre-elevação de 10% e tempo de acomodação de 30 segundos. Para verificar o comportamento do controlador foram feitas simulações variando os valores de  $Q$  e  $R$  buscando encontrar o que melhor se aproxima da resposta desejada.

Para isso, foi usada uma abordagem de otimização computacional semelhante a vista em (OGATA, 2010) para encontrar as constantes de um controlador PID que atendam a determinados critérios de desempenho. Tal abordagem de otimização computacional consiste em projetar um algoritmo que busque pelas soluções desejadas. Então, para este projeto do controlador LQR, foi desenvolvido um algoritmo que busque as matrizes hermitianas  $Q$  e  $R$  que melhor antedam aos critérios de

desempenho estabelecidos no projeto, que são  $t_s$  de 30 segundos e  $M_p$  de 10%.

Assim, o algoritmo desenvolvido realiza diversas variações na diagonal principal das matrizes hermitianas Q e R. Essas variações iniciam do valor 0,000001 e vão até o valor 1.000.000 tendo como passo para variação um fator multiplicador de valor 100, ou seja, cada um dos elementos da diagonal principal das matrizes hermitianas iniciam do valor 0,000001, depois vão para o valor  $0,000001 \times 100 = 0,0001$ , em seguida vão para o valor  $0,000001 \times 100 \times 100 = 0,01$  e assim até chegar ao valor de 1.000.000.

Para cada variação realizada o algoritmo faz o projeto do controlador e verifica se a resposta do sistema controlado está dentro dos requisitos de desempenho desejados para o projeto. As respostas obtidas que atenderam os requisitos de desempenho desejados são então contabilizadas e armazenadas para que se possa posteriormente serem analisadas e comparadas.

A Tabela 4 apresenta as matrizes de realimentação K obtidas para determinada variação das matrizes hermitianas Q e R que atendam aos requisitos de desempenho do projeto. A quantidade de variações realizadas pelo algoritmo em uma das simulações feitas somou um total de 1296 variações. Dessa quantidade, foram obtidos 216 resultados que atenderam aos critérios de desempenho do projeto. Os valores apresentados na Tabela 4 são apenas alguns dos resultados obtidos com a abordagem computacional.

**Tabela 4: Resultados obtidos com as variações das matrizes hermitianas.**

Matriz Q	Matriz R	Matriz de Realimentação K
$\begin{bmatrix} 0,0001 & 0 & 0 \\ 0 & 0,0001 & 0 \\ 0 & 0 & 0,0001 \end{bmatrix}$	[ 0,0001 ]	[ 1,7409 6,3223 ]
$\begin{bmatrix} 0,01 & 0 & 0 \\ 0 & 0,01 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	[ 1 ]	[ 1,4127 5,8924 ]
$\begin{bmatrix} 10.000 & 0 & 0 \\ 0 & 0,01 & 0 \\ 0 & 0 & 1.000.000 \end{bmatrix}$	[ 10.000 ]	[ 3,6513 31,4738 ]
$\begin{bmatrix} 1.000.000 & 0 & 0 \\ 0 & 1.000.000 & 0 \\ 0 & 0 & 1.000.000 \end{bmatrix}$	[ 1 ]	[ 1.000,8 4.702,1 ]

Os resultados desses controladores bem como as comparações pertinentes podem ser vistas no capítulo de resultados deste trabalho.

## 4 RESULTADOS

Neste capítulo são apresentadas as simulações realizadas e os resultados obtidos, bem como comparações entre os controladores robustos desenvolvidos com técnicas tradicionais de controle a fim de verificar a eficiência dos controladores projetados. Os resultados a serem apresentados são referentes aos projetos dos controladores realizados na Metodologia, capítulo 3, deste trabalho de conclusão de curso. A maioria dos testes foram realizados através de scripts no MATLAB e, em alguns casos, foi usado o Simulink.

### 4.1 RESULTADO DO CONTROLE ROBUSTO PD COM REALIMENTAÇÃO DE VELOCIDADE USANDO ANÁLISE INTERVALAR MODAL

Com o controlador robusto desenvolvido foram realizados testes variando os parâmetros do sistema em torno de 10% como previsto no seu projeto. Os testes comprovaram o bom desempenho do controlador ao utilizar análise intervalar para tornar-se robusto.

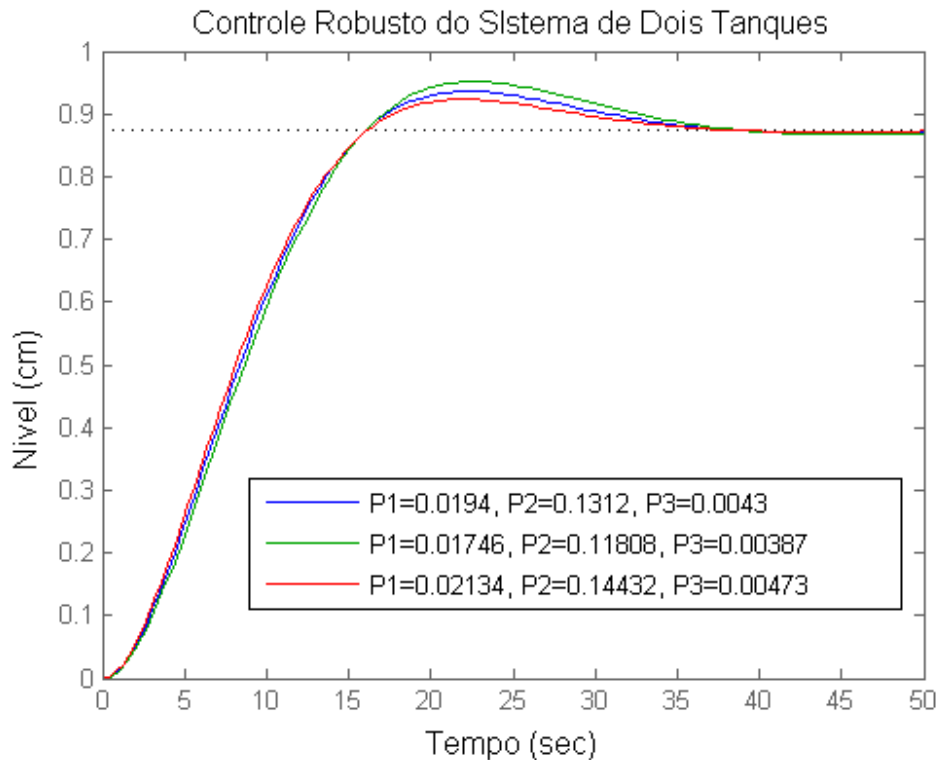
No teste realizado fixou-se os valores de  $K_p$  e  $K_d$  em seus valores medianos. Os valores dos parâmetros da planta, P1, P2 e P3, foram variados de forma sincronizada para representar os dois extremos dos intervalos e o seu ponto médio. A Tabela 5 mostra em detalhes os valores atribuídos a cada parâmetro do sistema para realização da simulação.

**Tabela 5: Especificações da primeira simulação.**

<i>Sistema</i>	$K_p$	$K_d$	$P1$	$P2$	$P3$
<i>sys – min</i>	1,5432	5,5421	0,01746	0,11808	0,00387
<i>sys – medio</i>	1,5432	5,5421	0,0194	0,1312	0,0043
<i>sys – max</i>	1,5432	5,5421	0,02134	0,14432	0,00473

A resposta da simulação pode ser visualizada na Figura 16. Para os três casos simulados percebe-se que os critérios de desempenho, sobre-elevação máxima de 10% e tempo de acomodação de 30 segundos, foram satisfeitos uma vez que nenhuma das respostas ultrapassou os limites de desempenho estabelecido no projeto do controlador.

**Figura 16: Resposta do sistema variando os parâmetros P1, P2 e P3 da planta.**



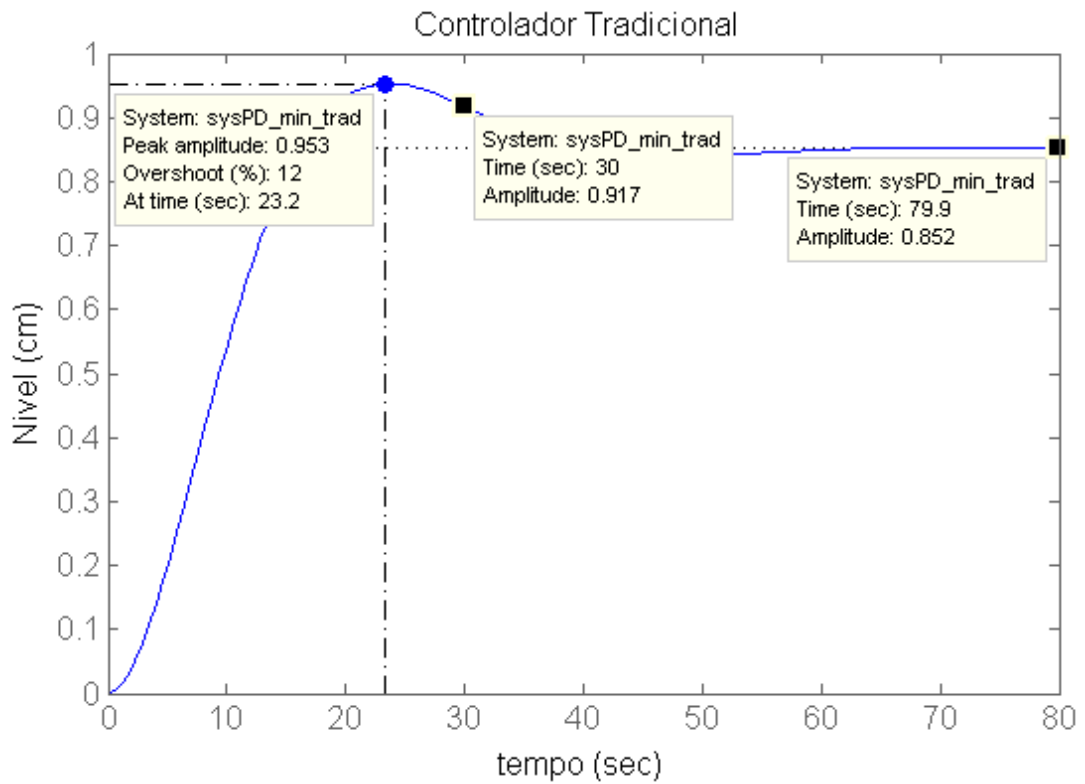
Foi realizada ainda uma comparação entre as respostas de um sistema de controle PD com realimentação de velocidade tradicional, projetado utilizando os valores padrões dos parâmetros da planta, e o controlador robusto usando análise intervalar modal projetado para manter o desempenho especificado mesmo com uma variação de 10% nos parâmetros da planta. As especificações dos parâmetros adotadas para a simulação podem ser conferidas na Tabela 6.

**Tabela 6: Especificações do controlador tradicional e do robusto.**

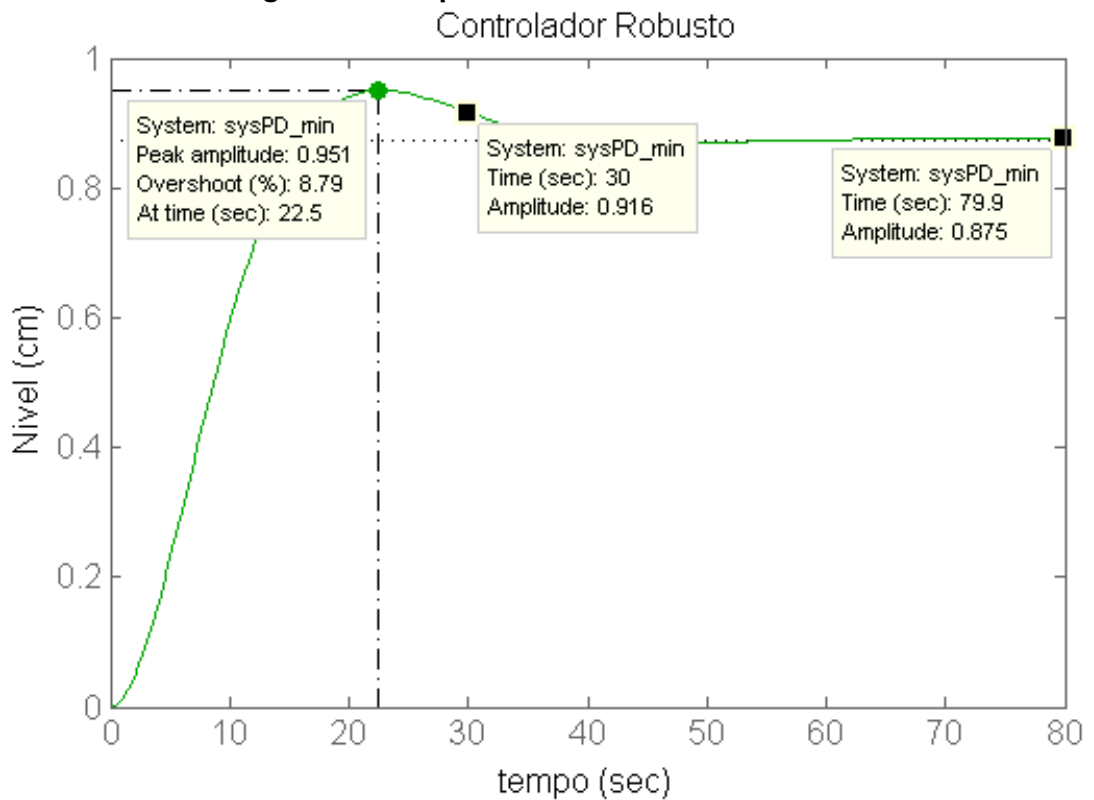
Sistema	$K_p$	$K_d$	$P1$	$P2$	$P3$
Robusto	1,5432	5,5421	0,01746	0,11808	0,00387
Tradicional	1,2680	3,5773	0,01746	0,11808	0,00387

Percebe-se pela Tabela 6 que os parâmetros da planta utilizados para os dois controladores, o tradicional e o robusto, são iguais. Os valores atribuídos aos parâmetros da planta são seus valores mínimos, dentro de seus intervalos anteriormente especificados de 10% de variação. Esse teste tem o objetivo de verificar a resposta obtida pelos controladores quando estes sofrem variações nos parâmetros da planta. A Figura 17 e a Figura 18 mostram a resposta da simulação do controlador tradicional e do robusto, respectivamente, a uma entrada degrau padrão.

**Figura 17: Resposta do controlador Tradicional.**



**Figura 18: Resposta do controlador Robusto.**



O controlador tradicional apresenta um desempenho fora do desejado

quando a planta está sujeita a variações em seus parâmetros, gerando uma resposta com 12% de sobre-elevação e tempo de acomodação de 32,8 segundos. Enquanto o controlador robusto mantém o desempenho desejado obtendo 8,79% de sobre-elevação e 29,6 segundos de tempo de acomodação. Nesta comparação torna-se claro que um controlador tradicional não é capaz de manter o desempenho desejado de um sistema quando este sofre variações em seus parâmetros. Sendo necessário, portanto, o projeto de um controlador robusto.

Apesar do controlador PD por realimentação de velocidade atender aos requisitos do projeto, de obter um tempo de estabelecimento de 30 segundos e uma sobre-elevação máxima de 10%, a resposta do sistema com o controle PD com realimentação de velocidade apresentou um erro estacionário, não alcançando o nível desejado (de 1 cm) em resposta ao degrau unitário. Isso mostra que o controlador PD com realimentação de velocidade não é o melhor controlador a ser aplicado a essa planta quando há a necessidade de se obter um erro de regime nulo. É preciso então fazer o projeto de outro controlador para evitar esse erro em regime como, por exemplo, um controlador PID.

#### 4.2 RESULTADO DO CONTROLE ROBUSTO PID COM REALIMENTAÇÃO DE VELOCIDADE USANDO ANÁLISE INTERVALAR MODAL

Após a avaliação dos resultados obtidos com o projeto do controlador robusto PD com realimentação de velocidade verificou-se a necessidade do projeto de outro controlador que elimine o erro em regime apresentado. Com isso, um controlador PID foi projetado e os resultados serão aqui mostrados.

O primeiro teste realizado apresenta a resposta do sistema ao degrau unitário para três diferentes valores de parâmetros da planta. Os valores dos parâmetros da planta,  $P1$ ,  $P2$  e  $P3$ , foram variados de forma sincronizada para representar os dois extremos dos intervalos e o seu ponto médio. Os valores de  $K_p$ ,  $K_i$  e  $K_d$  foram fixados em seus valores medianos. A Tabela 7 detalha os valores utilizados no teste.

**Tabela 7: Especificações da simulação do Controlador PID.**

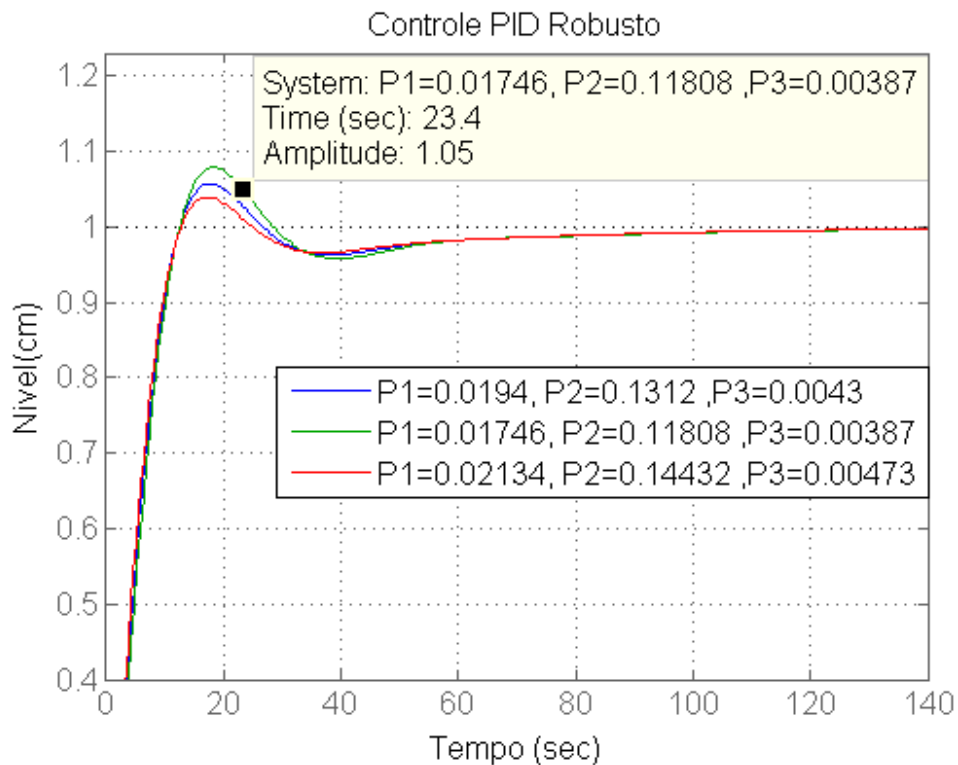
<i>Sistema</i>	$K_p$	$K_i$	$K_d$	$P1$	$P2$	$P3$
<i>sys – min</i>	1,8240	0,0386	7,5910	0,01746	0,11808	0,00387
<i>sys – medio</i>	1,8240	0,0386	7,5910	0,0194	0,1312	0,0043
<i>sys – max</i>	1,8240	0,0386	7,5910	0,02134	0,14432	0,00473

Os resultados obtidos podem ser vistos na Figura 20. Percebe-se que o erro em regime apresentado no projeto do controlador PD com realimentação de velocidade



foi eliminado pelo controlador PID. Os requisitos de desempenho também foram atendidos obtendo sobre-elevação máxima inferior a 10% e tempo de estabelecimento menor que 30 segundos (considerando critério de 5%).

**Figura 19: Resposta ao degrau unitário do controlador PID Robusto.**



Foi desenvolvido um controlador PID tradicional (não robusto) para realizar comparações com o controlador robusto projetado. O controlador PID tradicional foi desenvolvido considerando os valores padrões da planta e tendo como requisitos máxima sobre-elevação de 10% e tempo de acomodação de 30 segundos. A Tabela 8 mostra os valores obtidos para  $K_p$ ,  $K_i$  e  $K_d$  no projeto do controlador tradicional e os valores nos parâmetros da planta adotados para a simulação, além dos valores atribuídos ao controlador PID robusto.

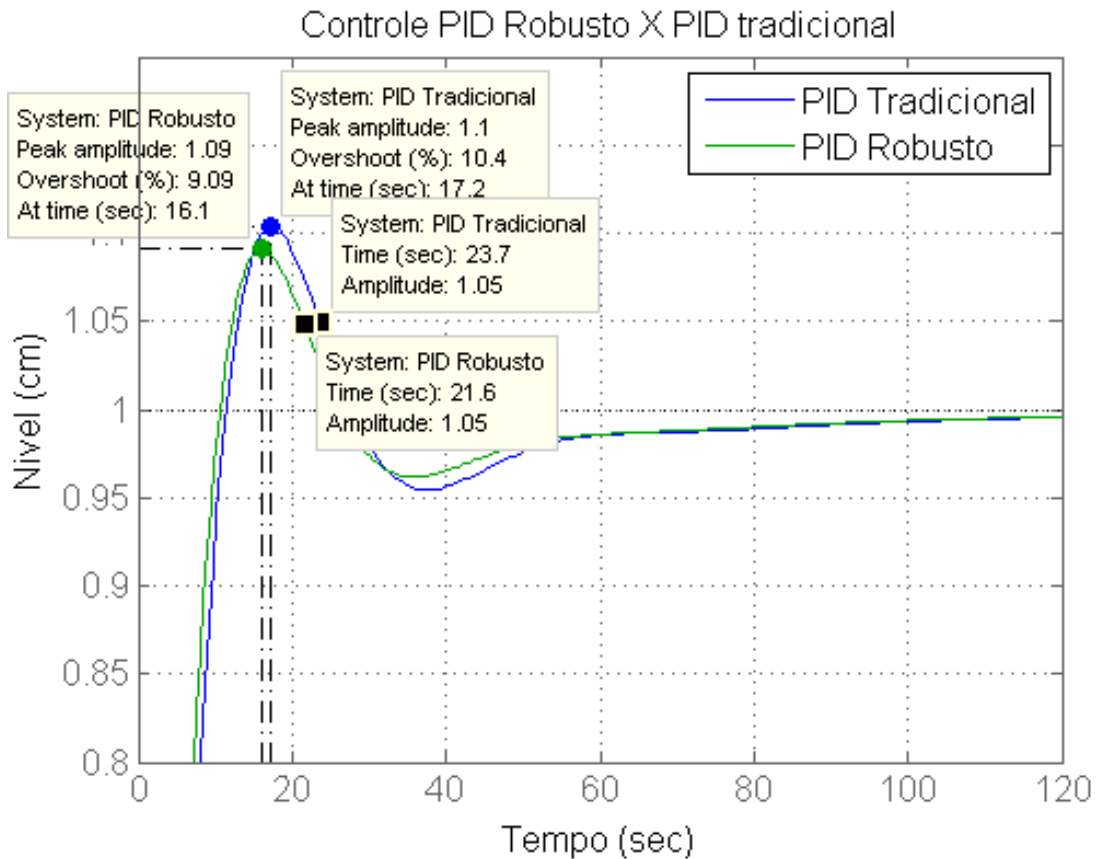
**Tabela 8: Valores adotados na comparação do Controlador Tradicional com o Robusto.**

Sistema	$K_p$	$K_i$	$K_d$	$P1$	$P2$	$P3$
Tradicional	1,4767	0,0324	4,6505	0,02134	0,11808	0,00387
Robusto	1,8240	0,0386	7,5910	0,02134	0,11808	0,00387

A eficácia do controlador robusto pode ser verificada na Figura 20. Essa simulação mostrou o bom resultado do controlador PID robusto em acompanhar o sinal de entrada quando comparado ao controlador tradicional que apresenta uma resposta

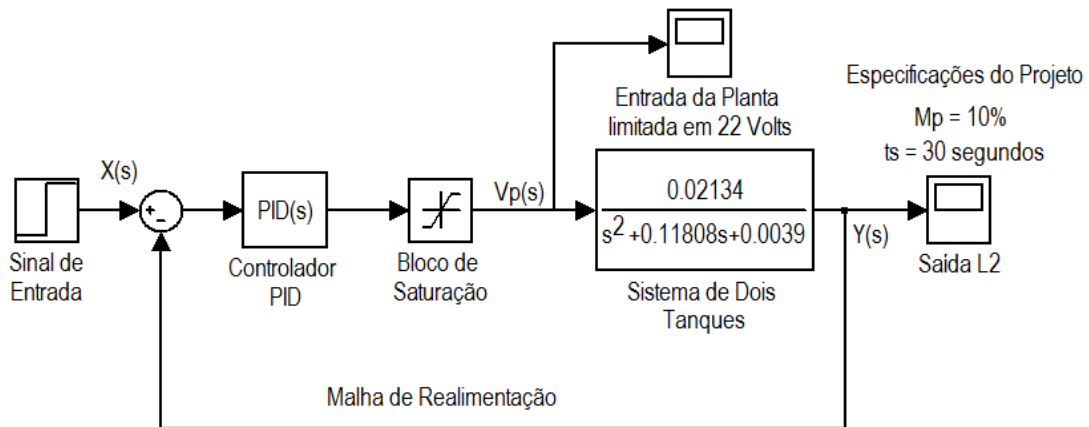
indesejada para máxima sobre-elevação quando há variações nos parâmetros da planta. Enquanto o controlador robusto atendeu aos requisitos do projeto com tempo de acomodação de 21,6 segundos e máxima sobre-elevação de 9,09%, o controlador tradicional apresentou um tempo de acomodação de 23,7 segundos e máxima sobre-elevação de 10,4%.

**Figura 20: Comparação entre Controlador Robusto e Tradicional.**



Foram realizados ainda testes no Simulink de forma a simular o sistema de dois tanques o mais próximo possível da realidade, inserindo na simulação um bloco de saturação que implementa as limitações físicas do sistema. O sistema completo desenvolvido no Simulink pode ser visto na Figura 21. Essa simulação apresentou resultados ligeiramente diferentes se comparados às simulações realizadas por scripts do MATLAB que modelam o sistema como se estes fossem ideais e livres de limitações físicas.

**Figura 21: Modelagem do Sistema de Dois Tanques com controlador PID feito no Simulink.**

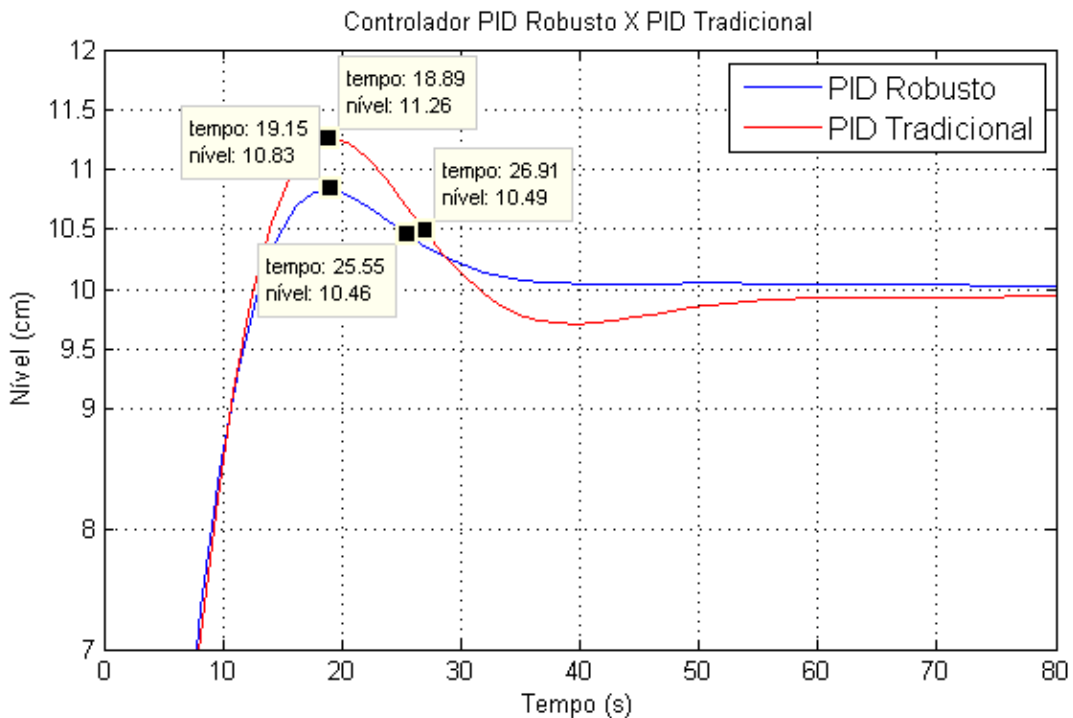


Através do Simulink é possível também aplicar outros sinais de entrada e com isso verificar como o sistema irá se comportar para diferentes entradas. Nas simulações anteriores, o sinal de entrada aplicado era um degrau unitário, o que provoca na saída um nível de água de 1 cm no segundo tanque do Sistema de Dois Tanques.

Para verificar o funcionamento do sistema controlado para outros sinais de entrada aplicou-se um sinal degrau na entrada, porém não mais unitário, e sim com amplitude 10. É importante lembrar que o Sistema de Dois Tanques permite, em ambos os tanques, um nível máximo de 30 cm. Os testes para essa entrada foram aplicados tanto no controlador PID Robusto quanto no controlador PID Tradicional usando os mesmos valores de parâmetros da Tabela 5. Os resultados podem ser vistos na Figura 22.

Percebe-se pela Figura 22 que o controlador robusto continuou gerando uma resposta dentro das especificações do projeto, com máxima sobre-elevação de 8,3% e tempo de acomodação de 25,5 segundos, enquanto que o controlador tradicional apresentou uma oscilação indesejada com pico de 11,26 centímetros representando 12,6% de máxima sobre-elevação apesar de obter um tempo de acomodação de 26,9 segundos.

**Figura 22: Resposta dos Controladores PID Robusto e Tradicional para uma entrada com amplitude igual a 10.**



Nesta comparação torna-se claro que um controlador tradicional não é capaz de manter o desempenho desejado de um sistema quando este sofre variações em seus parâmetros, sendo necessário, portanto, o projeto de um controlador robusto.

#### 4.3 RESULTADO DO CONTROLE ÓTIMO

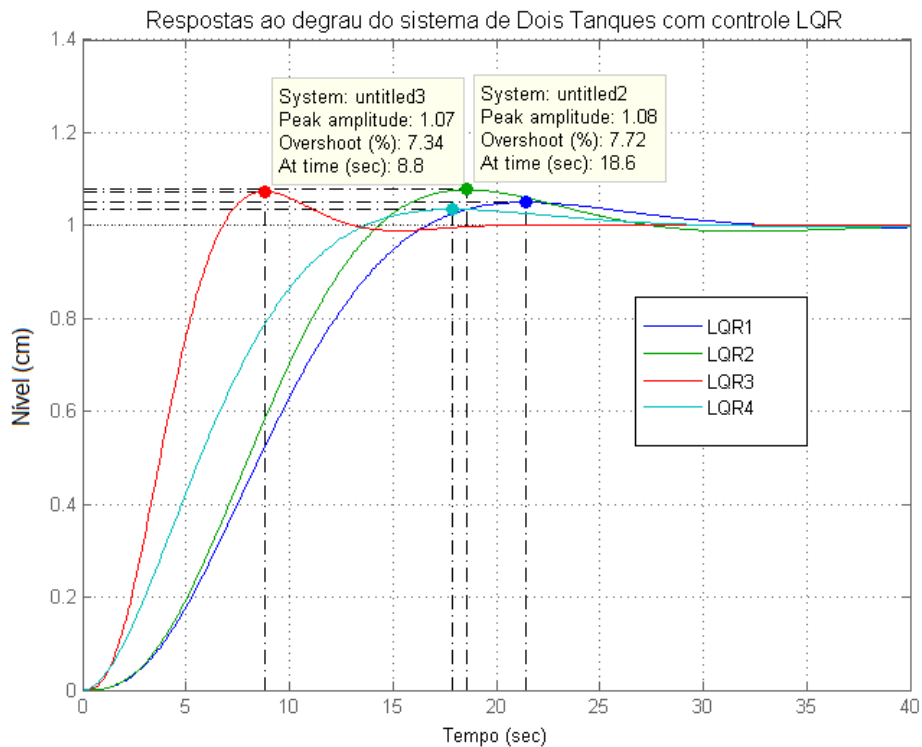
Nesta sessão, serão apresentados os resultados obtidos com o controle ótimo utilizando a técnica do Regulador Quadrático Linear (LQR) e o projeto por alocação de polos. O primeiro resultado mostra o comportamento do sistema em resposta ao degrau para quatro diferentes variações das matrizes hermitianas  $Q$  e  $R$  e, conseqüentemente, para as diferentes matrizes de realimentação. Esses valores são os mesmos exibidos na metodologia do projeto LQR e podem ser vistas novamente na Tabela 9.

A Figura (23) mostra a resposta do sistema ao degrau unitário para os diversos valores da matriz de realimentação  $K$  conforme exibidas na Tabela 9. Percebe-se, pela figura, que o sistema realmente atende os requisitos do projeto, de máxima sobre-elevação inferior a 10% e de tempo de estabelecimento menor que 30 segundos, para todas as variações da matriz  $K$ .

**Tabela 9: Valores da matriz de realimentação  $K$  obtidos com as variações das matrizes hermitianas e usadas na simulação.**

Sistema	Matriz Q	Matriz R	Matriz K
LQR1	$\begin{bmatrix} 0,0001 & 0 & 0 \\ 0 & 0,0001 & 0 \\ 0 & 0 & 0,0001 \end{bmatrix}$	[ 0,0001 ]	[ 1,7409 6,3223 ]
LQR2	$\begin{bmatrix} 0,01 & 0 & 0 \\ 0 & 0,01 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	[ 1 ]	[ 1,4127 5,8924 ]
LQR3	$\begin{bmatrix} 10.000 & 0 & 0 \\ 0 & 0,01 & 0 \\ 0 & 0 & 1.000.000 \end{bmatrix}$	[ 10.000 ]	[ 3,6513 31,4738 ]
LQR4	$\begin{bmatrix} 1.000.000 & 0 & 0 \\ 0 & 1.000.000 & 0 \\ 0 & 0 & 1.000.000 \end{bmatrix}$	[ 1 ]	[ 1.000,8 4.702,1 ]

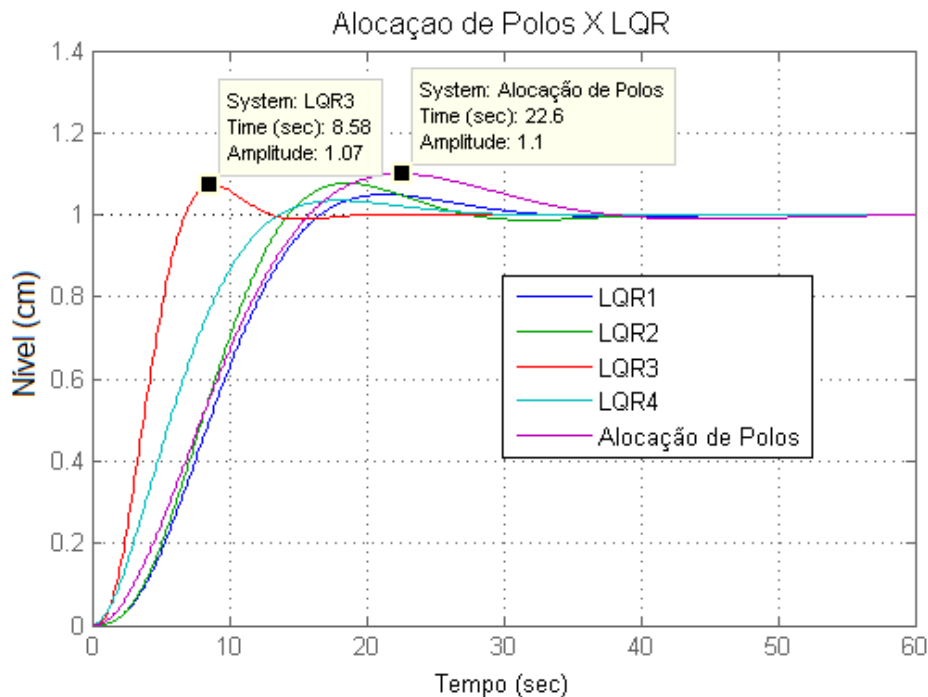
**Figura 23: Resposta do Controlador LQR para diferentes valores da matriz de realimentação  $K$ .**



Comparando esses resultados com o projeto do controlador por alocação de polos, como visto na Figura 24, é possível notar algumas diferenças. O controlador por alocação de polos apresenta resultados à beira dos limites dos critérios de desempenho estabelecidos para o projeto, porém isso acontece pelo fato do projeto

por alocação de polos posicionar todos os polos de malha fechada do sistema exatamente no local desejado. Com isso, o controle por alocação de polos produzirá resultados mais próximos às limitações impostas pelos critérios de desempenho do projeto, mas isso não quer necessariamente dizer que este tipo de projeto é pior que outras técnicas, muito pelo contrário. Existem técnicas, como o próprio método LQR, onde nem sempre se consegue alocar todos os polos nos locais desejados, sendo essa, uma das grandes vantagens de se utilizar o método de alocação de polos (OGATA, 2010).

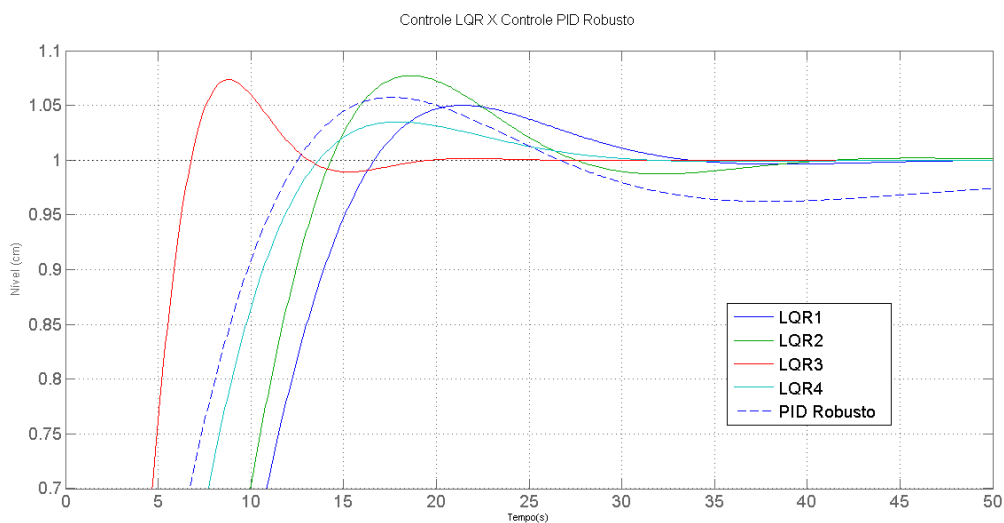
**Figura 24: Comparação entre controle por Alocação de Polos e controle LQR.**



Por outro lado, os resultados obtidos através dos projetos usando a técnica do Regulador Quadrático Linear (LQR) estão mais distantes dos limites dos critérios de desempenho estabelecidos para o projeto, porém apresentam resultados melhores se avaliado que o sistema obteve um menor tempo de estabelecimento e de sobre-elevação quando comparado com os resultados do projeto por alocação de polos.

Por último, foi feita uma comparação entre o controlador PID Robusto com o controlador LQR para os valores padrões do Sistema de Dois Tanques. O resultado obtido pode ser visto na Figura 25.

**Figura 25: Comparação entre controle LQR e controle PID Robusto.**

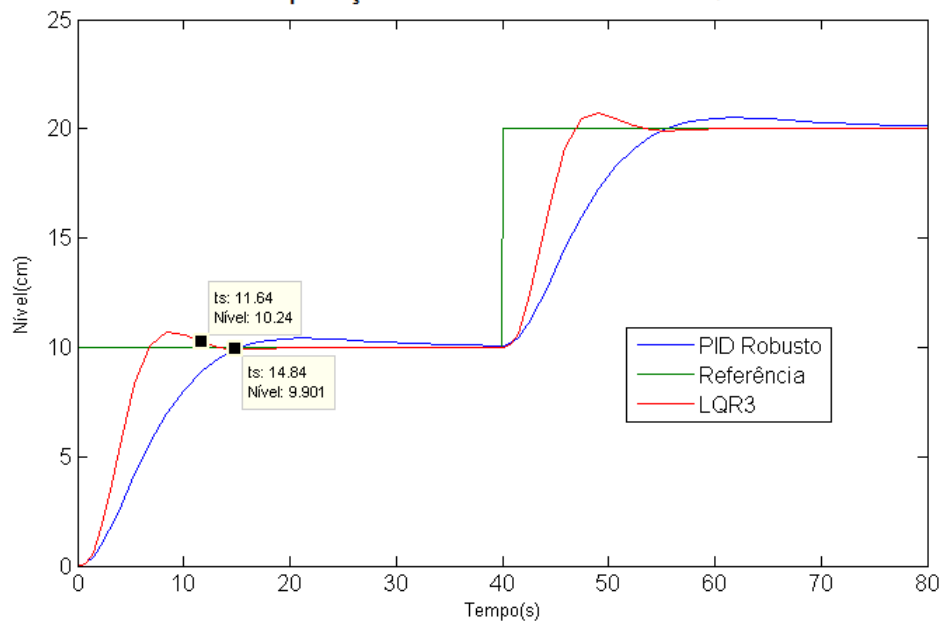


Percebe-se que uma das principais diferenças entre os resultados do LQR e o do Controle PID é que o PID, apesar de ter um tempo de estabelecimento dentro dos limites de desempenho esperados, gasta mais tempo que o controle LQR para alcançar seu estado final (nível = 1). Enquanto o LQR após atingir a máxima sobre-elavação rapidamente alcança seu estado final o PID demora mais que 50 segundos para isso. Caso esse tempo seja um fator importante nos requisitos do projeto torna-se mais interessante o uso do controlador LQR.

Porém, o controle PID Robusto tem a vantagem de manter os requisitos desejados do projeto mesmo com a variação dos parâmetros da planta como já mostrado anteriormente. Então, o PID torna-se ideal para a maioria dos casos práticos onde há incertezas nos parâmetros da planta ou a possibilidade de alteração desses parâmetros com o passar do tempo. Além disso, pode-se tentar projetar outro controlador PID que se aproxime mais do desempenho obtido pelo controlador LQR de forma a aumentar ainda mais as vantagens do uso do PID Robusto.

A Figura 26 apresenta outra comparação entre o controle PID Robusto e o LQR para diferentes valores de referência. Esse resultado foi obtido através de simulação no software Simulink.

**Figura 26: Comparação entre controle PID Robusto e LQR.**  
Comparação entre PID Robusto e LQR





## 5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O controlador PD com realimentação de velocidade atendeu aos requisitos do projeto em obter um tempo de acomodação de 30 segundos e uma sobre-elevação máxima de 10%. Porém, a resposta do sistema com o controle PD com realimentação de velocidade apresentou um erro de regime, não alcançando o nível desejado (de 1 cm) em resposta ao degrau unitário. Para eliminar esse erro, foi desenvolvido um controlador PID que tornou o modelo da planta um sistema do tipo 1, que tem como principal característica erro nulo em resposta ao degrau.

De forma a buscar modelar o Sistema de Dois Tanques o mais próximo possível de um sistema real, levando em consideração suas limitações físicas, foi realizada sua modelagem usando o software Simulink. Os testes realizados no Simulink foram favoráveis e puderam comprovar a eficácia do controle PID Robusto usando análise intervalar modal para o Sistema de Dois Tanques da *Quanser*.

Percebe-se então o bom desempenho dos controladores robustos desenvolvidos usando os conceitos de Análise Intervalar Modal. As comparações realizadas com projetos tradicionais mostraram a eficiência dos controladores robustos quando há variações nos parâmetros da planta. Portanto, o projeto de controladores robustos utilizando análise intervalar modal mostrou-se uma boa técnica de projeto de sistemas de controle, servindo de grande importância para sistemas que necessitem de garantia de desempenho, mesmo que sujeitos a variações nos seus parâmetros.

Já o projeto do controlador ótimo utilizando o LQR apresentou resultados interessantes mesmo apesar de não ser um controle robusto, que é capaz de manter o sistema no nível desejado mesmo com variações nos parâmetros da planta. Percebe-se, pelos resultados apresentados, que o controlador ótimo é capaz de não apenas manter o sistema estável, função principal de um controle ótimo, como também obter bons resultados em relação ao tempo de estabelecimento e máxima sobre-elevação.

Durante o desenvolvimento do trabalho, a principal dificuldade encontrada foi a falta do Sistema de Dois Tanques da *Quanser* para a realização de testes práticos que pudessem comprovar a eficácia dos controladores desenvolvidos no ambiente real. Apesar dos objetivos do trabalho terem sido alcançados, o acesso ao Sistema de Dois Tanques enriqueceria ainda mais o trabalho desenvolvido.

Por fim, percebe-se que os resultados obtidos em todos os projetos foram satisfatórios, mostrando a importância deste trabalho, e que seu objetivo principal foi alcançado. Para trabalhos futuros pretende-se analisar outros fatores do projeto do

controlador ótimo LQR, como o esforço de controle, de forma a deixar a análise do sistema projetado mais minuciosa, enriquecendo o trabalho como um todo. Além disso, deseja-se aproveitar todo material desenvolvido nos projetos por realimentação de estados, como a alocação de polos e o LQR, para o desenvolvimento de controladores ótimos e robustos como é o  $H_2$  e o  $H_\infty$ . E, a partir disso, obter novos resultados e fazer comparações com os projetos já desenvolvidos. Pretende-se ainda realizar comparações dos controladores robustos desenvolvidos com outros projetos encontrados na literatura (PRADO; MAITELLI, 2012).

## REFERÊNCIAS

- ACIOLY, B. M. **Fundamentação computacional da matemática intervalar**. 1. ed. Porto Alegre: CPGCC da UFRGS, 1991.
- AGUIRRE, L. A. **Enciclopédia de Automática: Controle e Automação**. 1. ed. São Paulo: Blucher, 2007.
- DORF, R. C.; BISHOP, R. H. **Sistemas de Controle Modernos**. 11. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2009.
- FERREIRA, C. C. T. **Alocação de Auto-estrutura Utilizando Controle Robusto LQG/LTR e Computação Evolutiva**. 1. ed. [S.l.]: Universidade Federal do Maranhão, São Luiz, 2004.
- FRANKLIN, G. F.; POWELL, J. D.; EMAMI-NAEINI, A. A. **Feedback Control and Dynamic Systems**. 2. ed. [S.l.]: Addison Wesley, 1991.
- GARDENES, E. *et al.* **Modal Intervals**. 1. ed. [S.l.]: Reliable Computing 7: 77-111, 2001.
- GROUP, S. **Extensiones de las funciones continuas**. 1. ed. Spain: Dept. de Informatica y Matematica Aplicada, Universidad de Girona, 1998.
- NEGRI, V. J. de. **Sistemas Hidráulicos e Pneumáticos para Automação e Controle** Parte I - Princípios Gerais da Hidráulica e Pneumática. 1. ed. Florianópolis: Universidade Federal de Santa Catarina, 2001.
- NISE, N. S. **Engenharia de Sistemas de Controle**. 3. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2002.
- OGATA, K. **Engenharia de Controle Moderno**. 5. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2010.
- PRADO, M. L. M. **Controle Robusto por Alocação de Pólos via Análise Intervalar Modal**. 1. ed. Campinas: Tese-Unicamp, 2006.
- PRADO, M. L. M.; MAITELLI, A. L. **Controle robusto por alocação de polos aplicado a um sistema de dois tanques**. 1. ed. Campina Grande - PB: Anais do XIX Congresso Brasileiro de Automática p. 5479-5486. ISBN: 978-85-8001-069-5, 2012.
- PRADO, M. L. M.; PAZ, M. A. **Controle Robusto utilizando Estrutura PD e Análise intervalar Modal**. 1. ed. Mérida: XIII Congreso Latinoamericano de Control Automatico, 2008.
- QUANSER. **Coupled Water Tank Experiments**. 2004. Disponível em: <<http://www.quanser.com>>. Acesso em: 23 Jul. 2012.
- SCHMIDT, A. M. **Controle de Nível de Líquido Utilizando Controlador Lógico Programável**. 1. ed. Ouro Preto: Universidade Federal de Ouro Preto, 2008.
- SELOW, R.; VEIGA, S. L. **Controlador do tipo LQG**. 2. ed. [S.l.]: da Vinci, Curitiba p. 155-172, 2005.

WANG, J.; JING, Y.; ZHANG, C. **Robust Cascade Control System Design for Central Airconditioning System**. 1. ed. Chongqing, China: Proceedings of the 7th World Congress on Intelligent Control and Automation, 2008.

WOLFF, M. P. M.; NETO, J. V. F.; LIMA, R. C. **Modelos de Decisão no Auxílio à escolha de Parâmetros de algoritmo genético**. 1. ed. [S.I.]: ERPO-NO 2011, Manaus - AM, 2011.

XUE, D.; CHEN, Y.; ATHERTON, D. P. **Linear Feedback Control: Analysis and Design with MATLAB**. [S.I.]: SIAM, 2007.

ZHOU, K.; DOYLE, J. C. **Essentials Robust Control**. 1. ed. Upper Saddle River, New Jersey: Prentice Hall, 1996.

ZHOU, K.; DOYLE, J. C.; GLOVER, K. **Robust and Optimal Control**. 1. ed. Upper Saddle River, New Jersey: Prentice Hall, 1996.